উচ্চতর গণিত

ঢাকা বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত?
ক $-\frac{1}{3}$ খ $\frac{1}{3}$ গ 1 ঘ 6

২. $\left(y^4-2+\frac{1}{y^4}\right)^4$ এর বিস্তৃতির পদ সংখ্যা কতটি?
ক 5 খ 8 গ 9 ঘ 16

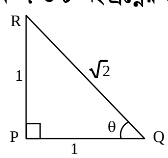
৩. $f(x) = ln\,\frac{8+x}{8-x}$ ফাংশনের রেঞ্জ কত?
ক $(-8, \infty)$ খ $(8, \infty)$ গ $(-8, 8)$ ঘ R

৪. $\log_{\sqrt{27}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে x এর মান কত?
ক 32 খ 81 গ 90 ঘ 243

৫. $\sqrt{2x-5}+3=2$ সমীকরণের সমাধান সেট কোনটি?
ক $\varnothing$ খ $\{3\}$ গ $\{-3\}$ ঘ $\{\pm 3\}$

৬. বিকাল 3 : 30 টায় ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ কত?
ক 75° খ 85° গ 90° ঘ 95°

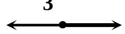
□ নিচের চিত্রের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



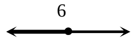
৭. PQ = 1 এবং QR = $\sqrt{2}$ হলে, $\sin(-\theta)+\cos(-\theta)$ এর মান কত?
ক $-\sqrt{2}$ খ 0 গ 1 ঘ $\sqrt{2}$

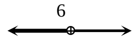
৮. $\frac{PR}{QR}+\frac{PQ}{QR}=\sqrt{2}$ হলে, θ এর মান কত?
ক $\frac{\pi}{2}$ খ $\frac{\pi}{3}$ গ $\frac{\pi}{4}$ ঘ $\frac{\pi}{6}$

৯. $x-4\le\frac{x}{3}$ এর সমাধান সংখ্যারেখার কোনটি?

ক 

খ

গ 

ঘ 

১০. P(–3, 2) এবং Q(3, –2) দুইটি বিন্দু হলে–
i. PQ এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{13}$ একক
ii. PQ, x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে
iii. PQ এর ঢাল $\frac{2}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১১. P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $5\underline{a}-3\underline{b}$ এবং $2\underline{a}-\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{PQ}$ = কত?
ক $3\underline{a}-2\underline{b}$ খ $-3\underline{a}+2\underline{b}$ গ $7\underline{a}-4\underline{b}$ ঘ $7\underline{a}+4\underline{b}$

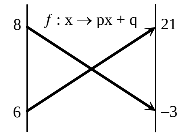
১২. সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সিলিন্ডার ও একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমি সমান হলে তাদের আয়তনের অনুপাত কোনটি?
ক 1 : 2 খ 1 : 3 গ 2 : 1 ঘ 3 : 1

১৩. পাঁচ টাকার পাঁচটি মুদ্রা একসাথে নিক্ষেপ করা হলে, নমুনা বিন্দু কয়টি হবে?
ক 5 খ 25 গ 32 ঘ 64

১৪. $A = \{x : x \in N, x^2+9x+20=0\}$ হলে n(A) = কত?
ক 4 খ 2 গ 1 ঘ 0

১৫. $F(x)=\frac{3}{2x-1}$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
ক $\{x\in R : x \ne -\frac{1}{2}\}$ খ $\{x\in R : x \ne \frac{1}{2}\}$
গ $\{x\in R : x \ge \frac{1}{2}\}$ ঘ $\{x\in R : x > \frac{1}{2}\}$

□ নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ১৬ ও ১৭নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১৬. p এর মান কত?
ক –7 খ –12 গ 9 ঘ 12

১৭. যদি p = 3 এবং q = 2 হয়, তবে $f(x)$ = এর ডোমেন কত?
ক $R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ খ $R-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ গ $R-\{3\}$ ঘ R

১৮. $p(x)=12x^2-15x^3-3x^4+5+3x$ বহুপদীর মুখ্য সহগ কোনটি?
ক –3 খ 3 গ 12 ঘ 15

১৯. যদি $\frac{2y+1}{y(y-1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}$ হয় তবে A এর মান কত?
ক –1 খ 1 গ 2 ঘ 3

২০. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য 6 cm হলে ঐ ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে. মিটার?
ক $6\sqrt{2}$ খ 6 গ $4\sqrt{3}$ ঘ $3\sqrt{3}$

২১. নব বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে. মি. হলে পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?
ক 7 π খ 14 π গ 49 π ঘ 196 π

২২. একটি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যোগ করলে কোনটি গঠিত হয়?
ক সরলরেখা খ বৃত্ত গ ত্রিভুজ ঘ কোণক

২৩. $2+5x-4x^2=0$ সমীকরণের মূলগুলোর প্রকৃতি কেমন?
ক মূলদ খ অমূলদ গ সমান ঘ জটিল

২৪. কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $U_n = 1+(-1)^{n+1}$ হলে, এর–
i. 5 তম পদ 2
ii. 12 তম পদ 12
iii. প্রথম 10টি পদের সমষ্টি 10
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৫. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}$.......অসীম ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{5}$
গ $\frac{1}{4}$ ঘ অসীমতক সমষ্টি নেই

■ খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

ঢাকা বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট

পূর্ণমান : ৫০

*[**দ্রষ্টব্য :** ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $F(x, y, z) = \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{64z^3}$

$Q(x) = x^3 - 64x.$

ক. $f(x) = \sqrt{x-4}$ হলে, $f^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $F(x, y, z) = \frac{3}{24xyz}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$6yz + 4zx + 3xy = 0$, অথবা $2x = 3y = 4z.$ ৪

গ. $\frac{3x^3}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $A = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots\ldots$ এবং

$S = 2(3x-5)^{-1} + 4(3x-5)^{-2} + 8(3x-5)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$ দুইটি অসীম ধারা।

ক. $2x^2 + 7x + 3 = 0$ সমীকরণটির মূলের ধরন ও প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে S ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩। $(A + Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি এবং $f(x) = \ln\frac{7-x}{7+x}$.

ক. যদি $p^a = q^b = r^c$ এবং $q^2 = pr$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^{-1} + c^{-1} = 2b^{-1}$. ২

খ. যদি $A = 3$ এবং $B = 1$ হয়, তবে n এর কোন মানের জন্য রাশিটির বিস্তৃতির ৫ম পদ ও ৬ষ্ঠ পদের সহগ সমান হবে? ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪। ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা যথাক্রমে AD, BE ও CF.

ক. সমবাহু ΔPQR এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ΔABC এর $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ হলে প্রমাণ কর যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$. ৪

গ. ΔABC এর মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$. ৪

৫। ΔPQR এর QR, RP ও PQ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, S, T.

ক. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{QS}$ ও $\overrightarrow{RT}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $QRST$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু U ও V হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $UV \parallel TS \parallel QR$ এবং $UV = \frac{1}{2}(QR - TS)$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RT} = \underline{0}$. ৪

৬। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো $P(6, 6)$, $Q(-6, 6)$, $R(6, -7)$ এবং $S(3, -7)$.

ক. দেখাও যে, Q ও S বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. $PQRS$ চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. $PQRS$ চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $3\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = P$ এবং $Q = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$

ক. $20°12'36''$ কে রেডিয়ান প্রকাশ কর। ২

খ. $P = 5$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, দেখাও যে, $Q = \frac{34}{39}$. ৪

৮। (i) একটি ঝুড়িতে 10টি লাল, 12টি সাদা ও 8টি কালো মার্বেল আছে।

(ii) কোনো একজন লোকের সিলেট হতে ঢাকা ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$ এবং ঢাকা হতে রংপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{4}{7}$.

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ছক্কায় 6 এবং মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা বের কর। ২

খ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. সম্ভাব্য ঘটনাটির Probability tree অঙ্কন কর। Probability Tree ব্যবহার করে লোকটি সিলেট থেকে ঢাকা ট্রেনে নয় কিন্তু রংপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	গ	২	গ	৩	ঘ	৪	ঘ	৫	ক	৬	ক	৭	খ	৮	গ	৯	গ	১০	ক	১১	খ	১২	ঘ	১৩	গ
	১৪	ঘ	১৫	খ	১৬	খ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	ক	২০	গ	২১	ঘ	২২	ক	২৩	খ	২৪	খ	২৫	গ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $F(x, y, z) = \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{64z^3}$

$Q(x) = x^3 - 64x.$

ক. $f(x) = \sqrt{x - 4}$ হলে, $f^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $F(x, y, z) = \frac{3}{24xyz}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$6yz + 4zx + 3xy = 0$, অথবা $2x = 3y = 4z.$ ৪

গ. $\frac{3x^3}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $y = f(x)$

বা, $y = \sqrt{x - 4}$

বা, $y^2 = x - 4$ বা, $x = y^2 + 4$

বা, $f^{-1}(y) = y^2 + 4$ [$\because y = f(x)$ হলে $f^{-1}(y) = x$]

$\therefore f^{-1}(x) = x^2 + 4$

$\therefore f^{-1}(-3) = (-3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{64z^3}$

প্রশ্নমতে, $F(x, y, z) = \frac{3}{24xyz}$

বা, $\frac{1}{8x^3} + \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{64z^3} = \frac{3}{24xyz}$

বা, $\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \left(\frac{1}{3y}\right)^3 + \left(\frac{1}{4z}\right)^3 - 3.\frac{1}{2x}.\frac{1}{3y}.\frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{4z}\right)\left\{\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3y}\right)^2+\left(\frac{1}{3y}-\frac{1}{4z}\right)^2+\left(\frac{1}{4z}-\frac{1}{2x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{6yz + 4zx + 3xy}{12xyz} = 0$

$\therefore 6yz + 4zx + 3xy = 0$

অথবা, $\left\{\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3y}\right)^2+\left(\frac{1}{3y}-\frac{1}{4z}\right)^2+\left(\frac{1}{4z}-\frac{1}{2x}\right)^2\right\} = 0$

আমরা জানি, একাধিক রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে তারা প্রত্যেকেই পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3y} = 0$ এবং $\frac{1}{3y} - \frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3y}$ বা, $\frac{1}{3y} = \frac{1}{4z}$

$\therefore 2x = 3y$ ... ... (i) $\therefore 3y = 4z$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $2x = 3y = 4z$

সুতরাং, $6yz + 4zx + 3xy = 0$ অথবা, $2x = 3y = 4z$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 - 64x$

$\therefore \frac{3x^3}{Q(x)} = \frac{3x^3}{x^3 - 64x}$

$= \frac{3x^3}{x(x^2 - 64)} = \frac{3x^2}{x^2 - 64}$

$= \frac{3(x^2 - 64) + 192}{x^2 - 64} = 3 + \frac{192}{x^2 - 64}$

$= 3 + \frac{192}{(x + 8)(x - 8)}$ ... ... (i)

ধরি, $\frac{192}{(x + 8)(x - 8)} \equiv \frac{A}{x + 8} + \frac{B}{x - 8}$ ... ... (ii)

(ii) নং এ পর্যায়ক্রমে এর উভয়পক্ষকে $(x + 8)(x - 8)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$192 \equiv A(x - 8) + B(x + 8)$ ... ... (iii)

(iii) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 8$ এবং $x = -8$ বসিয়ে পাই,

$B = 12, A = -12$

$\therefore \frac{192}{(x + 8)(x - 8)} \equiv -\frac{12}{x + 8} + \frac{12}{x - 8}$

(i) নং হতে পাই, $\frac{3x^3}{Q(x)} = \frac{3x^3}{x^2 - 64} \equiv 3 - \frac{12}{x + 8} + \frac{12}{x - 8}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $A = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots\ldots$ এবং $S = 2(3x - 5)^{-1} + 4(3x - 5)^{-2} + 8(3x - 5)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$ দুইটি অসীম ধারা।

ক. $2x^2 + 7x + 3 = 0$ সমীকরণটির মূলের ধরন ও প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে S ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2x^2 + 7x + 3 = 0$ সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = 7, c = 3$

$\therefore b^2 - 4ac = (7)^2 - 4.2.3 = 49 - 24 = 25$

যেহেতু $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ।

সুতরাং সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

খ দেওয়া আছে, $A = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots$

$= 4(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots\ldots + n$ তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\{(10 + 100 + 1000 + \ldots\ldots + n$ তম পদ) $-$ (1 + 1 + 1 + ... + n তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\left\{10.\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n\right\}$

$= \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$

$\therefore$ A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $S = 2(3x - 5)^{-1} + 4(3x - 5)^{-2} + 8(3x - 5)^{-3} + \ldots\ldots$

$= \frac{2}{(3x - 5)} + \frac{4}{(3x - 5)^2} + \frac{8}{(3x - 5)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{2}{3x - 5}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{4}{(3x - 5)^2}}{\frac{2}{3x - 5}}$

$= \frac{4}{(3x - 5)^2} \times \frac{(3x - 5)}{2}$

$= \frac{2}{3x - 5}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি ধারাটির সাধারণ অনুপাত $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ, $\left|\frac{2}{3x-5}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{2}{3x-5} < 1$ হয়।

$\therefore \frac{2}{3x-5} < 1$
বা, $3x - 5 > 2$
বা, $3x > 2 + 5$
বা, $3x > 7$
$\therefore x > \frac{7}{3}$

অথবা, $\frac{2}{3x-5} > -1$
বা, $2 > -3x + 5$ [উভয়পক্ষকে $3x - 5$ দ্বারা গুণ করে]
বা, $2 - 5 > -3x$
বা, $-3 > -3x$
বা, $3 < 3x$
$\therefore x > 1$

$\therefore$ নির্ণেয় অসীমতক সমষ্টির শর্ত : $x > \frac{7}{3}$ অথবা, $x > 1$.

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{2}{3x-5}}{1 - \frac{2}{3x-5}} = \frac{\frac{2}{3x-5}}{\frac{3x-5-2}{3x-5}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3x-5}}{\frac{3x-7}{3x-5}} = \frac{2}{3x-5} \times \frac{3x-5}{3x-7}$$

$$= \frac{2}{3x-7} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ০৩ $(A + Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি এবং $f(x) = \ln\frac{7-x}{7+x}$.

ক. যদি $p^a = q^b = r^c$ এবং $q^2 = pr$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^{-1} + c^{-1} = 2b^{-1}$. ২

খ. যদি $A = 3$ এবং $B = 1$ হয়, তবে n এর কোন মানের জন্য রাশিটির বিস্তৃতির ৫ম পদ ও ৬ষ্ঠ পদের সহগ সমান হবে? ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p^a = q^b \therefore p = q^{\frac{b}{a}}$

আবার, $r^c = q^b$

$\therefore r = q^{\frac{b}{c}}$

এখন, $pr = q^2$ বা, $q^{\frac{b}{a}}.q^{\frac{b}{c}} = q^2$ বা, $q^{\frac{b}{a}+\frac{b}{c}} = q^2$

বা, $\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2$ বা, $b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = 2$ বা, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

$\therefore a^{-1} + c^{-1} = 2b^{-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ প্রদত্ত বীজগাণিতিক রাশি $= (A + Bx)^n$

$A = 3$ ও $B = 1$ হলে, প্রাপ্ত রাশি $= (3 + x)^n$

এখন,

$(3 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^nC_r \times 3^{n-r} \times x^r$

$\therefore (r + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^nC_r\, 3^{n-r}$

$\therefore$ ৫ম পদ তথা $(4 + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^nC_4 3^{n-4}$

এবং ৬ষ্ঠ পদ তথা $(5 + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^nC_5\, 3^{n-5}$

শর্তমতে, ${}^nC_4 3^{n-4} = {}^nC_5\, 3^{n-5}$

বা, $\frac{n!}{4!(n-4)!} \times \frac{3^n}{3^4} = \frac{n!}{5!(n-5)!} \times \frac{3^n}{3^5}$

বা, $\frac{(n-5)!}{(n-4)(n-5)!} = \frac{1}{5 \times 3}$

বা, $\frac{1}{n-4} = \frac{1}{15}$

বা, $n - 4 = 15$

$\therefore n = 19$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \ln\frac{7-x}{7+x}$

লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{7-x}{7+x} > 0$ হবে যদি (i) $7 + x > 0$ এবং $7 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $7 + x < 0$ এবং $7 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -7$ এবং $x < 7$

ডোমেন $= \{x : x > -7\} \cap \{x : x < 7\}$

$= \{(-7, \infty) \cap (-\infty, 7)\} = (-7, 7)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -7$ এবং $-x < -7 \therefore x > 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -7\} \cap \{x : x > 7\} = \varnothing$

$\therefore f(x)$ ফাংশনের ডোমেন,

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$ **(Ans.)**

x এর যেকোনো স্বীকৃত বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে।

$\therefore f(x)$ ফাংশনের রেঞ্জ $= \mathbb{R}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৪ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা যথাক্রমে AD, BE ও CF.

ক. সমবাহু ΔPQR এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ΔABC এর $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ হলে প্রমাণ কর যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$. ৪

গ. ΔABC এর মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

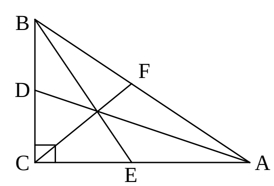
ক আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ এর মধ্যমা বা উচ্চতার $\frac{2}{3}$ অংশ। প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হলে,

উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ একক

শর্তমতে, $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = 6$

$\therefore a = 6\sqrt{3}$ সেমি **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন :** ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = 90°$ এবং AD, BE ও CF ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$



প্রমাণ : ΔABC এ $\angle ACB = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

এখন, ΔABC এ CF মধ্যমা। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BC^2 + AC^2 = 2(CF^2 + BF^2) = 2CF^2 + 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$ $\left[\because BF = \frac{1}{2}AB\right]$

বা, $BC^2 + AC^2 = 2CF^2 + \frac{1}{2}AB^2$

বা, $2CF^2 = (BC^2 + AC^2) - \frac{1}{2}AB^2$

বা, $2CF^2 = \frac{2(BC^2 + AC^2) - AB^2}{2}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $2BE^2 = \frac{2(BC^2 + AB^2) - AC^2}{2}$ ... ... (ii)

এবং $2AD^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{2}$ ... ... (iii)

(i) + (ii) + (iii) নং হতে পাই, $2(CF^2 + BE^2 + AD^2)$

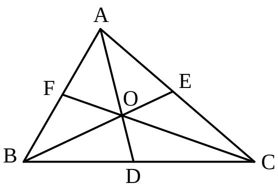
$= \frac{4(BC^2 + AB^2 + AC^2) - (BC^2 + AB^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(BC^2 + AB^2 + AC^2)}{2} = \frac{3(AB^2 + AB^2)}{2}$ $[\because AB^2 = AC^2 + BC^2]$

$= \frac{3.2AB^2}{2}$

$\therefore 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

প্রমাণ: ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ... ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$ বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$ বা, $2AD = 3AO$ বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$

$\therefore$ (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ ΔPQR এর QR, RP ও PQ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, S, T.

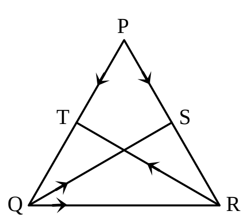
ক. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{QS}$ ও $\overrightarrow{RT}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $QRST$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু U ও V হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $UV \parallel TS \parallel QR$ এবং $UV = \frac{1}{2}(QR - TS)$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RT} = \underline{0}$. ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔPQS হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$ [ত্রিভুজবিধি]

বা, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{QS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}$ ... ... (i)

আবার, ΔPRT হতে, $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PT}$ [ত্রিভুজবিধি]

$\therefore \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{RT}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{RT}\right) - \overrightarrow{QS}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RT}\right) - \overrightarrow{QS}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RT} - \overrightarrow{QS}$

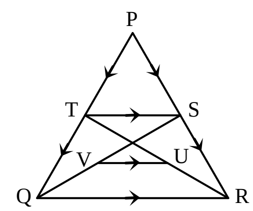
বা, $4\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{RT} - 4\,\overrightarrow{QS}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3\overrightarrow{PQ} = -\,2\overrightarrow{RT} - 4\overrightarrow{QS}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{RT} - \frac{4}{3}\overrightarrow{QS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{QS} - \frac{2}{3}\overrightarrow{RT}$ **(Ans.)**

খ



চিত্রে, T, PQ এর মধ্যবিন্দু এবং QR ∥ TS। QRST ট্রাপিজিয়ামের TR এবং SQ কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে U ও V। U, V যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $UV \parallel TS \parallel QR$ এবং $UV = \frac{1}{2}(QR - TS)$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে Q, R, T, S এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{Q}, \underline{R}, \underline{T}, \underline{S}$

$\therefore$ U বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{R})$ [$\because$ U, TR এর মধ্যবিন্দু]

এবং V বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{Q})$ [$\because$ V, SQ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{Q}) - \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{R})$

$= \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{Q} - \underline{T} - \underline{R})$

$= \frac{1}{2}\{(S - T) - (R - Q)\}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right)$

QR ∥ TS হওয়ায় $\left(\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right)$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{TS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{UV}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{TS}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

কারণ, $\overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right)$

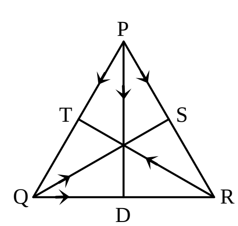
বা, $\left|\overrightarrow{UV}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right|$

$\therefore UV = \frac{1}{2}(TS - QR)$

বা, $UV = -\frac{1}{2}(TS - QR) = \frac{1}{2}(QR - TS)$

$\therefore UV \parallel TS \parallel QR$ এবং $UV = \frac{1}{2}(QR - TS)$ **(প্রমাণিত)**

গ



ΔPQD-এ ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD}$

$\therefore \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ ... ... (i) [D, QR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$]

ΔPRT-এ $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}$

বা, $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$ ... ... (ii) [T, PQ এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]

এবং ΔPQS-এ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$

বা, $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ}$

$\therefore \overrightarrow{QS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ ... ... (iii) [S, PR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

বা, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RT} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো *P*(6, 6), *Q*(– 6, 6), *R*(6, – 7) এবং *S*(3, – 7).

ক. দেখাও যে, *Q* ও *S* বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা *x*-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. *PQRS* চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. *PQRS* চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

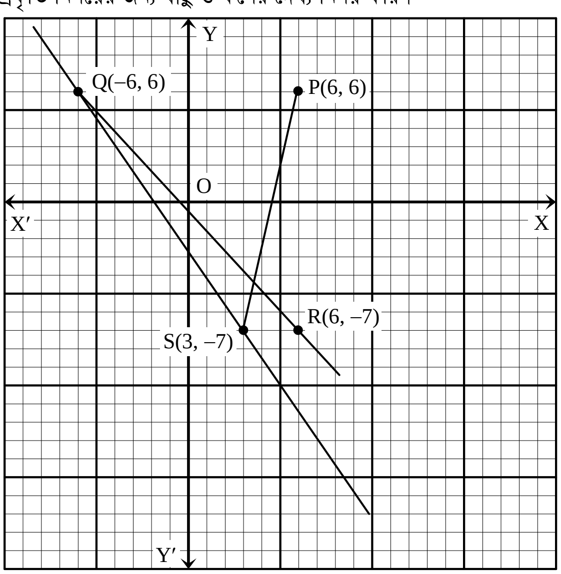
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক Q(– 6, 6) ও S(3, – 7) বিন্দুগামী QS

সরলরেখার ঢাল, $m = \frac{6+7}{-6-3} = \frac{13}{-9} = -\frac{13}{9}$

আমরা জানি, ঋণাত্মক ঢালবিশিষ্ট সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, QS রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ তৈরি করবে। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো P(6, 6), Q(– 6, 6), R(6, – 7) এবং S(3, – 7)। বিন্দু চারটি দিয়ে গঠিত PQSR চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয়ের জন্য বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



বাহু, $PQ = \sqrt{(6+6)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{12^2 + 0} = 12$ একক

বাহু, $QS = \sqrt{(-6-3)^2 + (6+7)^2} = \sqrt{81 + 169} = 5\sqrt{10}$ একক

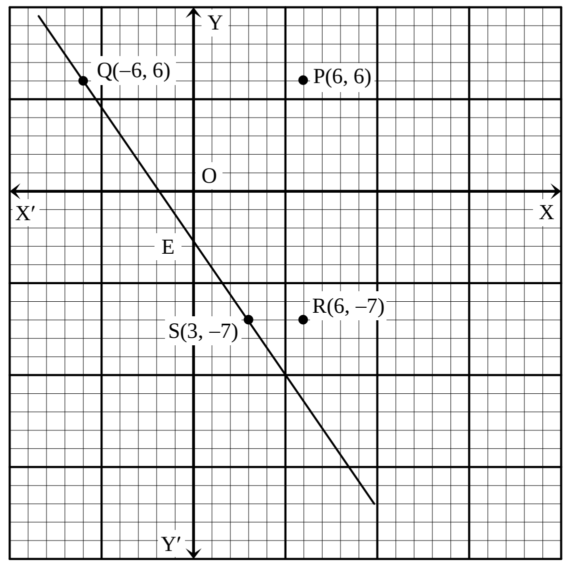
বাহু, $SR = \sqrt{(3-6)^2 + (-7+7)^2} = \sqrt{9+0} = 3$ একক

বাহু, $PR = \sqrt{(6-6)^2 + (6+7)^2} = \sqrt{169} = 13$ একক

যেহেতু চতুর্ভুজের বাহুগুলো পরস্পর অসমান তাই কর্ণগুলোও অসমান হবে। আবার, PQ বাহুর P ও Q বিন্দুর কোটি সমান হওয়ায় PQ সরলরেখা এবং SR বাহুর S ও R বিন্দুদ্বয়ের কোটি সমান হওয়ায় SR সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ এরা পরস্পর সমান্তরাল।

যেহেতু চতুর্ভুজের একজোড়া বাহু সমান্তরাল এবং কোনো বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান নয় তাই চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম।

গ PQSR চতুর্ভুজের S(3, – 7) ও R(6, – 7) বিন্দুদ্বয় চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।



মনে করি, QS রেখা y-অক্ষকে E(0, a) বিন্দুতে ছেদ করে।

QS রেখার সমীকরণ, $\frac{y-6}{6+7} = \frac{x+6}{-6-3}$

বা, $13x + 78 = -9y + 54$

বা, $13x + 9y + 24 = 0$ ... ... (i)

(i) নং রেখা (0, a) বিন্দুগামী হওয়ায়,

$13 \times 0 + 9 \times a + 24 = 0$

বা, $9a = -24$

$\therefore a = -\frac{24}{9} = -\frac{8}{3}$

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$

P ও R বিন্দুর ভুজ 6 হওয়ায় PR রেখা x-অক্ষকে F(6, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে PQSR চতুর্ভুজের চতুর্থ চতুর্ভাগের অংশটি হবে OESRF যেখানে O(0, 0) মূলবিন্দু।

∴ প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে OESRF অংশের

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -8/3 & -7 & -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|0 + 0 - 21 + 0 + 0 - 0 + 8 + 42 + 42 + 0|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times 71$ বর্গএকক

$= 35.5$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $3\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = P$ এবং $Q = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$

ক. $20°12'36''$ কে রেডিয়ান প্রকাশ কর। ২

খ. $P = 5$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, দেখাও যে, $Q = \frac{34}{39}$. ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $20°12'36'' = 20° + \left(\frac{12}{60}\right)° + \left(\frac{36}{3600}\right)°$

$= \left(20 + \frac{1}{5} + \frac{1}{100}\right)°$

$= \left(\frac{2021}{100} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান

$= 0.3527$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $3\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = P$ এবং $P = 5$

$\therefore 3\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 5$

বা, $3\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 5$

বা, $4\cot^2\theta = 4$ বা, $\cot^2\theta = 1$

$\therefore \cot\theta = \pm 1$

ধনাত্মক মান নিয়ে পাই, $\cot\theta = 1 = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

ঋণাত্মক মান নিয়ে পাই, $\cot\theta = -1 = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\cot\theta = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4}$

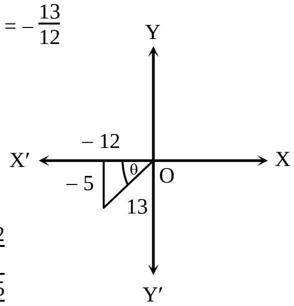
$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{12}{13}$ [$\because \cos\theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \sin\theta = -\frac{5}{13}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{13}{12}$



এখন, $Q = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$

$= \frac{-(-\sin\theta) + \cos\theta}{\sec\theta + \tan(-\theta)}$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{-5-12}{13}}{\frac{-13-5}{12}}$

$= \frac{-17}{13} \times \frac{12}{-18} = \frac{34}{39}$

$\therefore Q = \frac{34}{39}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (*i*) একটি ঝুড়িতে 10টি লাল, 12টি সাদা ও 8টি কালো মার্বেল আছে।

(*ii*) কোনো একজন লোকের সিলেট হতে ঢাকা ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$ এবং ঢাকা হতে রংপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{4}{7}$.

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ছক্কায় 6 এবং মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা বের কর। ২

খ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. সম্ভাব্য ঘটনাটির Probability tree অঙ্কন কর। Probability Tree ব্যবহার করে লোকটি সিলেট থেকে ঢাকা ট্রেনে নয় কিন্তু রংপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র,

S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}

$\therefore$ নমুনাবিন্দু = 12টি

ছক্কায় 6 ও মুদ্রায় T আসার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র = {6T}

অর্থাৎ, 1টি।

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{1}{12}$ **(Ans.)**

খ প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নিলে প্রতিবার মোট মার্বেল সংখ্যা পূর্বাপেক্ষা 1 কমে যায়।

মোট মার্বেল সংখ্যা = (10 + 12 + 8)টি = 30টি।

১ম মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{30}$

২য় মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{29}$

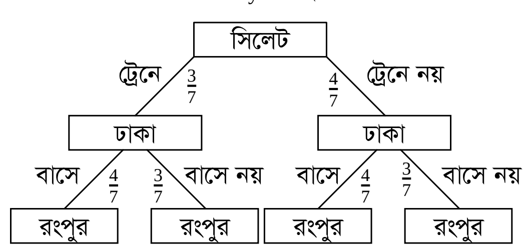
৩য় মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{28}$

৪র্থ মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{27}$

$\therefore$ সবগুলো মার্বেল কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{30} \times \frac{7}{29} \times \frac{6}{28} \times \frac{5}{27}$

$= \frac{2}{783}$ **(Ans.)**

গ সম্ভাবনার মাধ্যমে Probability tree হবে :



$\therefore$ লোকটির সিলেট থেকে ঢাকা ট্রেনে নয় কিন্তু রংপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$ **(Ans.)**

রাজশাহী বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] পূর্ণমান : ২৫

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. নিচের কোনটি প্রতিসম রাশি?
ক $2x^2–5yz–z^2$ খ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$
গ $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ ঘ $-x^2-y^2-z^2$

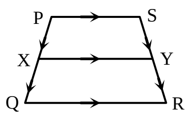
২. $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3p}{2}$ হলে, $\cos\theta$ = কত?
ক $\frac{13}{12}$ খ $\frac{12}{13}$ গ $-\frac{12}{13}$ ঘ $-\frac{13}{12}$

Note : সঠিক উত্তর নেই। $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ এর জন্য $\sin\theta$ এর মান ঋণাত্মক

৩. 3y = 6x – 2 সরলরেখার–
i. ঢাল 6 ii. y-অক্ষের ছেদক $-\frac{2}{3}$
iii. x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ সূক্ষ্মকোণ
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

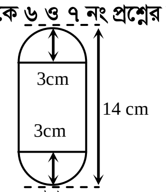
৪. A(1, 3), B(3, 2) এবং C(–4, –2) শীর্ষবিশিষ্ট ∆ABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?
ক $\frac{15}{2}$ বর্গএকক খ 15 বর্গএকক গ $\frac{35}{2}$ বর্গএকক ঘ 30 বর্গএকক

৫. চিত্রে X ও Y যথাক্রমে PQ ও SR এর মধ্যবিন্দু যেখানে PS || QR এবং PS = 6 cm, QR = 10 cm হলে, XY এর মান কত?



ক 16 cm খ 8 cm
গ 4 cm ঘ 2 cm

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ৬ ও ৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



চিত্র : ক্যাপসুল

৬. ক্যাপসুলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি.?
ক 260.89 খ 263.89 গ 265.89 ঘ 269.89

৭. ক্যাপসুলের আয়তন নির্ণয় কর।
ক 339.29 ঘন সেমি খ 336.29 ঘন সেমি
গ 333.29 ঘন সেমি ঘ 330.29 ঘন সেমি

৮. একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হলে হেড অপেক্ষা অধিকবার টেল আসার সম্ভাবনা কত?
ক $\frac{2}{3}$ খ $\frac{1}{2}$ গ $\frac{1}{8}$ ঘ $\frac{1}{6}$

৯. $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি কততম?
ক 3 তম খ 4 তম গ 5 তম ঘ 6 তম

১০. কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 70 জন ফুটবল, 50 জন ক্রিকেট এবং 40 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলার অন্তত একটি খেলা পছন্দ করে কত জন?
ক 70 খ 80 গ 120 ঘ 160

১১. নিচের কোনটি এক-এক ফাংশন?
ক $F(x) = (x + 4)^2$ খ $F(x) = |x – 3|$
গ $F(x) = e^x$ ঘ $F(x) = \frac{5}{|x|}, x \neq 0$

১২. $P(x) = \frac{6x^5 + x^2}{2 + 12x^3}$ হলে,
i. বহুপদীটির মাত্রা 5 ii. বহুপদীটির মুখ্যসহগ $\frac{1}{2}$
iii. P(– 2) = 2
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৩. যদি $\frac{x+5}{(x-1)(x-3)} \equiv \frac{P}{x-1} + \frac{Q}{x-3}$ হয়, তবে P ও Q এর মান যথাক্রমে নিচের কোনটি?
ক 3 এবং 4 খ – 3 এবং 4 গ 3 এবং – 4 ঘ – 3 এবং – 4

১৪. সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে. মি. হলে, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য কত?
ক $5\sqrt{3}$ সে. মি. খ $3\sqrt{5}$ সে. মি. গ $\sqrt{5}$ সে. মি. ঘ $\sqrt{3}$ সে. মি.

১৫. 4x – 3y + 5 = 0 সরলরেখাটির ঢাল কত?
ক $-\frac{4}{3}$ খ $-\frac{3}{4}$ গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{4}{3}$

১৬. PQR এ PQ = 11 সে মি., QR = 13 সে. মি. এবং PR = 16 সে. মি.। ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
ক 2.51 সে. মি. খ 2.94 সে. মি. গ 3.24 সে. মি. ঘ 3.55 সে. মি.

১৭. $3^{2x+5} = 3.5^{2x+4}$ হলে, x = ?
ক – 2 খ $-\frac{3}{2}$ গ $+\frac{3}{2}$ ঘ 2

১৮. জাইফা 13 বছর বয়সে জে. এস. সি পরীক্ষা দিয়েছিল এবং 18 বছর বয়সে সে এইচ.এস.সি পরীক্ষা দিবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ কর।
ক $13 \leq x \leq 18$ খ $13 < x \leq 18$ গ $13 < x < 18$ ঘ $13 \leq x < 18$

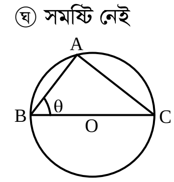
☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৯ ও ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

$2 + 3\sqrt{2} + 9 + \frac{27}{\sqrt{2}} + \dots\dots\dots$

১৯. ধারাটির n তম পদ কোনটি?
ক $(n + 1)\sqrt{n}$ খ $2\frac{n}{2^{n-1}}$ গ $2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ ঘ $2\frac{2^n}{2^{n-1}}$

২০. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
ক $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$ খ $\frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ গ $-\frac{4+6\sqrt{2}}{9}$ ঘ সমষ্টি নেই

২১. চিত্রে $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং O বৃত্তের কেন্দ্র হলে–



i. বৃত্তের পরিধি 2π ii. বৃত্তের ক্ষেত্রফল π
iii. ∆ABC এর তিনকোণের সমষ্টি π রেডিয়ান
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২২. সকাল 11:25 টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ কত ডিগ্রি?
ক 192.5° খ 190° গ 12.5° ঘ 10°

২৩. $\beta = \frac{7\pi}{2}$ হলে,
i. $\cos\left(\beta-\frac{p}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ii. $\text{cosec}\left(\beta-\frac{p}{3}\right) = -2$
iii. $\tan\left(\beta-\frac{p}{4}\right) = -1$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৪. $y = \log_5 x$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?
ক $y = \log_x 5$ খ $y = 5^x$ গ $y = \log_x \frac{1}{5}$ ঘ $y = 5^{-x}$

২৫. যদি $(a\sqrt{a})^{4a} = (a^3)^{a\sqrt{a}}$ হয়, তবে a এর মান কত?
ক $\frac{3}{2}$ খ 2 গ $\frac{9}{4}$ ঘ 4

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

রাজশাহী বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** 1 2 6

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান :** ৫০

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ এবং $P(x) = \frac{2x+4}{(x-1)(x^2+2)}$.

ক. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5-2x}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. f একটি সার্বিক ফাংশন কিনা যাচাই কর। ৪

গ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $(2 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 15120 এবং $y = f(x) = \ln\frac{7+x}{7-x}$.

ক. $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩। (i) একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারার ১ম দুই পদের সমষ্টি $\frac{3}{2}$ এবং অসীমতক সমষ্টি 2।

(ii) 4 + 44 + 444 + ... একটি ধারা।

ক. অনন্ত গুণোত্তর ধারার সূত্র প্রয়োগ করে $0.\dot{1}\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. (i) নং এ বর্ণিত অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪। ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত যার AC ও BD দুটি কর্ণ এবং $\angle BAC < \angle DAC$.

ক. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 3 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD. ৪

গ. যদি AB উক্ত বৃত্তের ব্যাস হয় এবং AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. ৪

৫। (i) P(2, – 3), Q(7, – 3) এবং R(2, 3) একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

(ii) x + 3y = 13, x + y = 3, x + y = 5 এবং y = 3 চারটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. P ও Q বিন্দুগামী রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ৪

গ. (ii)নং এর সমীকরণ চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬। ABCD চতুর্ভুজের A, B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 4), (– 4, 2), (– 2, – 6) ও (6, – 4)। AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S।

ক. AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$.

ক. $4\theta = \pi$ হলে, $a + b^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a + b = x$ হলে, দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. ৪

গ. $3(a^2 + b^2) = 5$ এবং $0 < \theta < 2\pi$, হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (i) দুটি নিরপেক্ষ ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) 1 থেকে 32 পর্যন্ত নম্বর দেয়া কার্ডগুলো থেকে একটি কার্ড দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো।

ক. দেখাও যে, সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। ২

খ. ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর এবং নমুনা ক্ষেত্র হতে দুটি ছক্কায় একই ফলাফল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. কার্ডের নম্বরটি 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	*	৩	গ	৪	ক	৫	খ	৬	খ	৭	ক	৮	খ	৯	গ	১০	খ	১১	গ	১২	গ	১৩	খ
	১৪	ক	১৫	ঘ	১৬	ঘ	১৭	ক	১৮	গ	১৯	গ	২০	ঘ	২১	ঘ	২২	ক	২৩	ক	২৪	খ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ এবং $P(x) = \dfrac{2x+4}{(x-1)(x^2+2)}$

ক. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. f একটি সার্বিক ফাংশন কিনা যাচাই কর। ৪

গ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$

$g(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $5 - 2x > 0$ হয়।

বা, $-2x > -5$ বা, $2x < 5$ $\therefore x < \dfrac{5}{2}$

$\therefore g(x)$ এর ডোমেন, $D_g = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x < \dfrac{5}{2}\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

$f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$x + 5 \neq 0$

বা, $x \neq -5$ হয়।

ধরি, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$ ... ... (i)

তাহলে, $y = \dfrac{x-3}{x+5}$

বা, $xy + 5y = x - 3$ বা, $xy - x = -5y - 3$

বা, $x(y-1) = -5y - 3$ বা, $x = \dfrac{-5y-3}{y-1}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{-5y-3}{y-1}$ $\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{-5x-3}{x-1}$

$f^{-1}(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $x - 1 \neq 0$ বা, $x \neq 1$ হয়।

$\therefore$ ডোম f^{-1} = রেঞ্জ $F = \mathbb{R} - \{1\}$

কিন্তু কোডোমেন $F = \mathbb{R}$

$\therefore$ রেঞ্জ $\neq$ কোডোমেন

তাই ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়। **(যাচাই করা হলো)**

গ দেওয়া আছে, $P(x) = \dfrac{2x+4}{(x-1)(x^2+2)}$

ধরি, $\dfrac{2x+4}{(x-1)(x^2+2)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$ ... ... (i)

বা, $2x + 4 \equiv A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$ ... ... (ii)

$\therefore 2x + 4 \equiv (A+B)x^2 + (C-B)x + 2A - C$ ... ... (iii)

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে, $2 + 4 = A(1+2) + 0$

বা, $6 = 3A$ $\therefore A = 2$

(iii) নং হতে, x^2, x ও ধ্রুবপদের সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + B = 0$

বা, $B = -A$ $\therefore B = -2$

আবার, $C - B = 2$

বা, $C + 2 = 2$ $\therefore C = 0$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{2x+4}{(x-1)(x^2+2)} \equiv \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{-2x+0}{x^2+2}$

$= \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2x}{x^2+2}$; এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $(2 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 15120 এবং $y = f(x) = \ln \dfrac{7+x}{7-x}$.

ক. $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$

বা, $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \dfrac{n!}{(n-3)! \times 3!}$

বা, $\dfrac{n!}{(n-2) \times (n-3)! \times 2} = \dfrac{n!}{(n-3)! \times 6}$

বা, $\dfrac{1}{(n-2) \times 2} = \dfrac{1}{6}$

বা, $2n - 4 = 6$

বা, $2n = 10$

$\therefore n = 5$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত রাশি $= (2 + ax)^7$

$(2 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^7C_r 2^{7-r}(ax)^r$

$= {}^7C_r 2^{7-r}.a^r.x^r$

x^3 সংবলিত পদের জন্য, $r = 3$

প্রশ্নমতে, ${}^7C_3.2^{7-3}.a^3 = 15120$

বা, $560a^3 = 15120$

বা, $a^3 = 27 = 3^3$

$\therefore a = 3$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{7+x}{7-x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{7+x}{7-x} > 0$ যদি (i) $7 + x > 0$ এবং $7 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $7 + x < 0$ এবং $7 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -7$ এবং $-x > -7$ $\therefore x < 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -7 < x\}$ এবং $\{x : x < 7\}$

$= (-7, \infty) \cap (-\infty, 7) = (-7, 7)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -7$ এবং $-x < -7$ $\therefore x > 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -7\} \cap \{x : x > 7\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$ **(Ans.)**

রেঞ্জ নির্ণয় : ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{7+x}{7-x}$

বা, $e^y = \dfrac{7+x}{7-x}$ বা, $7 + x = 7e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 7(e^y - 1)$

বা, $x = \dfrac{7(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = \mathbb{R}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ (i) একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারার ১ম দুই পদের সমষ্টি $\frac{3}{2}$ এবং অসীমতক সমষ্টি 2।
(ii) 4 + 44 + 444 + ... একটি ধারা।

ক. অনন্ত গুণোত্তর ধারার সূত্র প্রয়োগ করে $0.\dot{1}\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২
খ. (i) নং এ বর্ণিত অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ৪
গ. (ii) নং ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212 ... ...$
$= 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + ...$
এই অসীম গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, a = 0.12 এবং
সাধারণ অনুপাত $r = \frac{0.0012}{0.12} = 0.01$
$\therefore 0.\dot{1}\dot{2} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.12}{1-(0.01)} = \frac{0.12}{0.99} = \frac{4}{33}$ **(Ans.)**

খ ধরি, অসীম গুণোত্তর ধারাটি হলো, $a + ar + ar^2 + ...$
$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$
প্রশ্নমতে, $a + ar = \frac{3}{2}$ $\therefore a(1+r) = \frac{3}{2}$ ... ... (i)
আবার, $\frac{a}{1-r} = 2$ ... ... (ii)
(ii) নং কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{a}{1-r} \times \frac{1}{a(1+r)} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
বা, $1 - r^2 = \frac{3}{4}$
বা, $r^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$ $\therefore r = \pm\frac{1}{2}$
অর্থাৎ, গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \pm\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

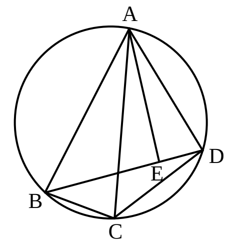
গ দেওয়া আছে, A = 4 + 44 + 444 + ...
$= 4(1 + 11 + 111 + ... + n$ তম পদ)
$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + ... + n$ তম পদ)
$= \frac{4}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + ... + n$ তম পদ)}
$= \frac{4}{9}\{(10 + 100 + 1000 + ... + n$ তম পদ) $-$ (1 + 1 + 1 + ... + n তম পদ)}
$= \frac{4}{9}\left\{10.\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right) - n\right\} = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$
$\therefore$ A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$
(Ans.)

প্রশ্ন ▸ ০৪ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত যার AC ও BD দুটি কর্ণ এবং $\angle BAC < \angle DAC$.

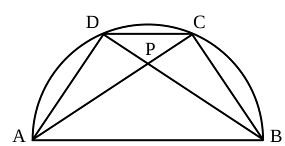
ক. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 3 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD. ৪
গ. যদি AB উক্ত বৃত্তের ব্যাস হয় এবং AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = 3 সেমি
$\therefore$ ত্রিভুজটির মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি $= \frac{3}{2} \times$ (অতিভুজ)^2
$= \frac{3}{2} \times 3^2$ বর্গ সেমি
$= \frac{27}{2}$ বর্গ সেমি **(Ans.)**

খ 

বিশেষ নির্বচন : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও DC এবং AD ও BC। AC ও BD চতুর্ভুজটির দুটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD।
অঙ্কন : $\angle BAC < \angle DAC$ বলে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান $\angle DAE$ আঁকি যেন AE রেখাংশ BD কর্ণকে E বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAC = \angle DAE$
বা, $\angle BAC + \angle EAC = \angle DAE + \angle EAC$
$\therefore \angle BAE = \angle DAC$
এখন, ΔABE ও ΔADC এর মধ্যে $\angle BAE = \angle DAC$
$\angle ABE = \angle ACD$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle AEB$ = অবশিষ্ট $\angle ADC$
$\therefore \Delta ABE$ ও ΔADC সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC}$
অর্থাৎ, AC.BE = AB.CD ... ... (i)
আবার, ΔABC ও ΔAED এর মধ্যে,
$\angle BAC = \angle DAE$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle ACB = \angle ADE$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle ABC$ = অবশিষ্ট $\angle AED$
$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAED সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$
অর্থাৎ, AC.DE = BC.AD ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
AC.BE + AC.DE = AB.CD + BC.AD
বা, AC(BE + DE) = AB.CD + BC.AD
$\therefore$ AC.BD = AB.CD + BC.AD [$\because$ BE + DE = BD] **(প্রমাণিত)**

গ 

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত। AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$।
অঙ্কন : A, D; B, C ও C, D যোগ করি।
প্রমাণ : ΔCPD ও ΔAPB-এ
$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC-এর ওপর অবস্থিত]
এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]
অবশিষ্ট $\angle PCD$ = অবশিষ্ট $\angle PBA$
$\therefore \Delta CPD$ ও ΔAPB সদৃশ।
$\therefore \frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$
বা, AP.CP = BP.DP
বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$ [উভয়পক্ষে AP^2 যোগ করে]
বা, $AP(CP + AP) = BP.DP + DP^2 + AD^2$
[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$; $\therefore AP^2 = AD^2 + DP^2$ এবং $AB^2 = AD^2 + BD^2$]
বা, $AP.AC = BP.DP + DP^2 + AB^2 - BD^2$
বা, $AP.AC = DP(BP + DP) + AB^2 - BD^2$
বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$
বা, $AP.AC = -BD(BD - DP) + AB^2$
বা, $AP.AC = -BD.BP + AB^2$
$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ (i) $P(2, -3)$, $Q(7, -3)$ এবং $R(2, 3)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।
(ii) $x + 3y = 13$, $x + y = 3$, $x + y = 5$ এবং $y = 3$ চারটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. P ও Q বিন্দুগামী রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২
খ. দেখাও যে, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ৪
গ. (ii)নং এর সমীকরণ চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

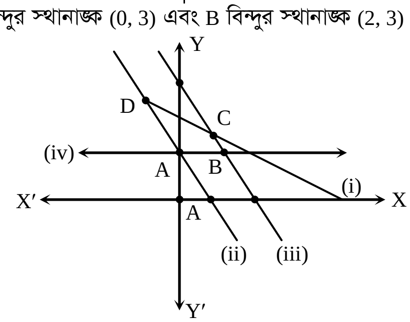
ক দেওয়া আছে,
P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, -3)$
এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(7, -3)$
$\therefore$ P ও Q বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{-3+3}{7-2} = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,
$P(2, -3)$, $Q(7, -3)$ এবং $R(2, 3)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।
$\therefore$ PQ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-2)^2 + (-3+3)^2} = 5$ একক
$\therefore$ QR এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$ একক
$\therefore$ PR এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-2)^2 + (-3-3)^2} = 6$ একক
এখন, $PQ^2 + PR^2 = 5^2 + 6^2 = 61 = (\sqrt{61})^2 = QR^2$
$\therefore PQ^2 + PR^2 = QR^2$ অর্থাৎ, ত্রিভুজটি পিথাগোরাসের সূত্রকে মেনে চলে।
তাই, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,
চারটি সরলরেখার সমীকরণ, $x + 3y = 13$ ... ... (i)
$x + y = 3$ ... ... (ii)
$x + y = 5$ ... ... (iii)
$y = 3$ ... ... (iv)
(iv) এর মান (ii) ও (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x + 3 = 3$	$x + 3 = 5$
$\therefore x = 0$	$\therefore x = 2$

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 3)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 3)$



আবার,
(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে, $2y = 10 \therefore y = 5$
y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে, $5 + x = 3 \therefore x = -2$
$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 5)$
(i) হতে (iii) নং বিয়োগ করে পাই, $2y = 8$
$\therefore y = 4$
y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে, $x + 4 = 5$
$\therefore x = 1$
$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 4)$
এখন, সরলরেখা চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ বর্গএকক}$$
$$= \frac{1}{2}(-6 + 8 + 5 - 6 - 3 + 8) \text{ বর্গএকক}$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 \text{ বর্গ একক}$$
$= 3$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ ABCD চতুর্ভুজের A, B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, 4)$, $(-4, 2)$, $(-2, -6)$ ও $(6, -4)$। AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S।

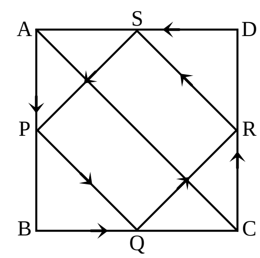
ক. AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২
খ. ABCD চতুর্ভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, 4)$ ও $(-4, 2)$
$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+4} = \frac{y-4}{4-2}$
বা, $\frac{x-4}{8} = \frac{y-4}{2}$
বা, $x - 4 = 4y - 16$
$\therefore x - 4y + 12 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,
ABCD চতুর্ভুজের A, B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, 4)$, $(-4, 2)$, $(-2, -6)$ ও $(6, -4)$
$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4+4)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{17}$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4+2)^2 + (2+6)^2} = 2\sqrt{17}$ একক
CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-6)^2 + (-6+4)^2} = 2\sqrt{17}$ একক
DA বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-4)^2 + (-4-4)^2} = 2\sqrt{17}$ একক
অর্থাৎ, চতুর্ভুজটির চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান বলে চতুর্ভুজটি হয় বর্গ না হয় রম্বস।
AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4+2)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{36 + 100} = 2\sqrt{34}$ একক
BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-6)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{100 + 36} = 2\sqrt{34}$ একক
অর্থাৎ, চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি বর্গ। **(Ans.)**

গ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S।
P ও Q, Q ও R, R ও S, S ও P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$,
A, B যোগ করি।
তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$
অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
বা, $\underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{AC}$
আবার, $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$
বা, $\underline{c} + \underline{d} = \overrightarrow{CA}$
কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$
অর্থাৎ, $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$
$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$
$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।
অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।
$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $a = \cot\theta$ এবং $b = \text{cosec}\theta$.

ক. $4\theta = \pi$ হলে, $a + b^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. $a + b = x$ হলে, দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. ৪
গ. $3(a^2 + b^2) = 5$ এবং $0 < \theta < 2\pi$, হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $4\theta = \pi \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

আবার, $a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$

প্রদত্ত রাশি $= a + b^2 = \cot\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$

$= \cot\frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} = 1 + (\sqrt{2})^2$

$= 1 + 2 = 3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $a + b = x$

বা, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = x$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = x$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = x$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \sec\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $3(a^2 + b^2) = 5$

বা, $3\cot^2\theta + 3\operatorname{cosec}^2\theta = 5$

বা, $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $2\cot^2\theta = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

বা, $\cot^2\theta = \frac{1}{3}$ বা, $\cot\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

এখন, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ থেকে পাই, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]

আবার, $\cot\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ থেকে পাই, $\cot\theta = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ

$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) দুটি নিরপেক্ষ ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো।
(ii) 1 থেকে 32 পর্যন্ত নম্বর দেয়া কার্ডগুলো থেকে একটি কার্ড দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো।

ক. দেখাও যে, সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। ২

খ. ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর এবং নমুনা ক্ষেত্র হতে দুটি ছক্কায় একই ফলাফল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. কার্ডের নম্বরটি 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, একটি দৈব পরীক্ষার সসীম নমুনাক্ষেত্র S এবং উক্ত নমুনাক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট A একটি ঘটনা।

ধরি, S নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(S)$

A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= n(A)$

$\therefore$ সম্ভাবনার গাণিতিক সংজ্ঞা অনুসারে পাই, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ... ... (i)

এটি স্পষ্ট যে, A ঘটনার উপাদান সংখ্যা 0 থেকে n(S) এর মধ্যে থাকবে।

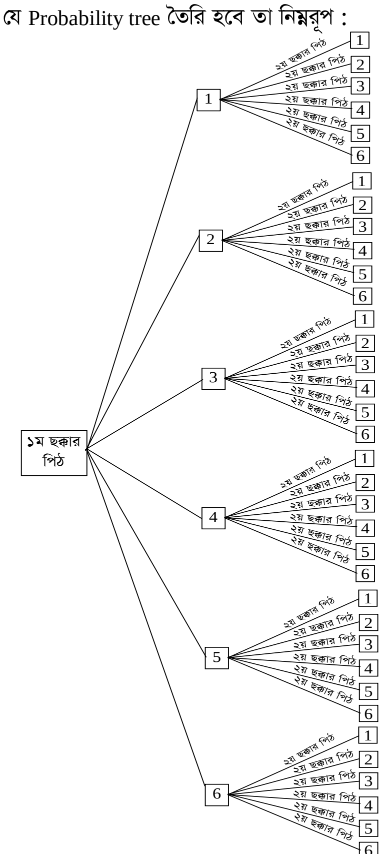
অর্থাৎ, $0 \le n(A) \le n(S)$

বা, $\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)}$ [n(S) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $0 \le P(A) \le 1$ [(i) নং সমীকরণ থেকে]

$\therefore 0 \le P(A) \le 1$ **(দেখানো হলো)**

খ দুইটি ছক্কা একত্রে একবার নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করা হলে, সম্ভাব্য ঘটনার যে Probability tree তৈরি হবে তা নিম্নরূপ :



দুটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি হবে = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore$ মোট নমুনা বিন্দু = 36টি

উভয় ছক্কায় একই ফলাফল আসার অনুকূল নমুনা বিন্দু = 6টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

গ ধরি, 1 থেকে 32 নম্বর পর্যন্ত কার্ডের মোট সংখ্যা, $n(S) = 32$

কার্ডগুলোর মধ্যে 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার ঘটনা,

A = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32}

$\therefore$ মোট সম্ভাব্য ফলাফল, $n(A) = 21$

$\therefore$ কার্ডের নম্বরটি 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা,

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{21}{32}$ **(Ans.)**

কুমিল্লা বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] পূর্ণমান : ২৫

[বিশেষ দ্রষ্টব্য : সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।] **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১ ও ২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

$\tan\theta = \frac{2}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

১. $\sec\theta$ এর মান কত?

ক $-\frac{\sqrt{13}}{3}$ খ $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ গ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ঘ $\frac{\sqrt{13}}{3}$

২. $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{2\sin\theta + 3\cos\theta}$ = কত?

ক $\frac{1}{7}$ খ $-\frac{5}{13}$ গ $-\frac{1}{5}$ ঘ 0

৩. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + ...$ হলে, ধারাটির–

i. 11তম পদ = $\frac{1}{3^{10}}$

ii. প্রথম 8টি পদের সমষ্টি = $\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^8}\right)$

iii. অসীমতক সমষ্টি = $\frac{3}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৪. $x^2 - 3x - 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল কোনটি?

ক $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ খ $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$ গ 1 ঘ 2

৫. $A(-1, 2)$ ও $B(1, -2)$ হলে, AB রেখার সমীকরণ কোনটি?

ক $2x + y = 4$ খ $2x - y + 4 = 0$ গ $2x + y = 0$ ঘ $2x - y = 0$

৬. ΔABC এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

ক $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = O$ খ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = O$

গ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ ঘ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

৭. একটি ছক্কা নিক্ষেপে যৌগিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত?

ক 1 খ $\frac{1}{2}$ গ $\frac{1}{3}$ ঘ $\frac{1}{6}$

৮. কোনো ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 2 : 5 : 11 হলে ক্ষুদ্রতম কোণের বৃত্তীয় মান কত?

ক $\frac{\pi}{18}$ খ $\frac{\pi}{9}$ গ $\frac{5\pi}{18}$ ঘ $\frac{11\pi}{9}$

৯. $1.2\dot{5}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে কত হবে?

ক $\frac{113}{9}$ খ $\frac{113}{89}$ গ $\frac{113}{90}$ ঘ $\frac{113}{999}$

১০. $4^{x+7} = 2^{x+2}$ হলে, x এর মান কত?

ক -12 খ -7 গ 7 ঘ 14

১১. $P(x, y) = 7x^5 + 5x^4y^4 + y^6$ বহুপদীর মাত্রা কত?

ক 5 খ 6 গ 7 ঘ 8

১২. $x \in R$ হলে $\sqrt{x^2}$ এর মান কত?

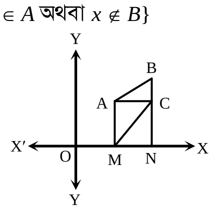
ক $-x$ খ x গ $\pm 2x$ ঘ $|x|$

১৩. A ও B সেট হলে $A \backslash B$ এর সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কোনটি?

ক $\{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ খ $\{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

গ $\{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$ ঘ $\{x : x \in A$ অথবা $x \notin B\}$

১৪.



BN এর উপর *AB* এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

ক *AC* খ *BC*

গ *MN* ঘ *CN*

১৫. A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2 সে. মি. এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.। এরা পরস্পর বহিঃস্পর্শ করলে A বিন্দু হতে B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?

ক 2 সে. মি. খ 3 সে.মি. গ 4 সে. মি. ঘ 5 সে. মি.

১৬. $f(x) = x^2$ হলে–

i. ডোম $f = R$

ii. রেঞ্জ $f = \{y \in R : y \geq 0\}$

iii. f এক-এক ফাংশন

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৭. $(-1, -1)$ ও $(-5, -5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢাল কত?

ক $-\frac{2}{3}$ খ -1 গ $\frac{2}{3}$ ঘ 1

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৮ ও ১৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

$A = (1 - 3x)^5$ একটি দ্বিপদী রাশি।

১৮. x^3 এর সহগ কত?

ক -270 খ -10 গ 10 ঘ 270

১৯. A এর বিস্তৃতিতে শেষ পদ কত?

ক $243x^3$ খ x^5 গ $-x^3$ ঘ $-243x^5$

২০. $A = \{1\}$ এবং $B = \{3\}$ হলে, $P(A \cap B)$ = কত?

ক $\{\varnothing\}$ খ $\{\varnothing, \{1\}\}$

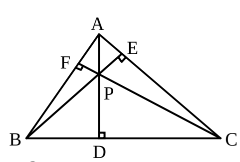
গ $\{\varnothing, \{3\}\}$ ঘ $\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

২১. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2 - x}}$ ফাংশনের ডোমেন কত?

ক $\{x \in R : x < -2\}$ খ $\{x \in R : x \leq -2\}$

গ $\{x \in R : x < 2\}$ ঘ $\{x \in R : x \leq 2\}$

২২.



চিত্রে P বিন্দুর নাম কী?

ক ভরকেন্দ্র খ লম্ববিন্দু

গ অন্তঃকেন্দ্র ঘ পরিকেন্দ্র

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ২৩ ও ২৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

2 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি ধাতব নিরেট কঠিন গোলককে গলিয়ে 1 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি করা হলো।

২৩. গোলকটির আয়তন কত?

ক 32π ঘন সে.মি. খ 4π ঘন সে.মি.

গ $\frac{4\pi}{3}$ ঘন সে.মি. ঘ $\frac{32\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

২৪. উৎপন্ন সিলিন্ডারটির উচ্চতা কত?

ক 4π সে.মি. খ 4 সে.মি. গ $\frac{4\pi}{3}$ সে.মি. ঘ $\frac{4}{3}$ সে.মি.

২৫. $f(x) = 5^x$ ফাংশনের রেঞ্জ কত?

ক $(0, -\infty)$ খ $(0, \infty)$ গ $(-\infty, 0)$ ঘ $(\infty, 0)$

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

কুমিল্লা বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** 1 2 6

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। (i) $F(x) = \frac{x}{2x+3}$

(ii) $G(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+9)}$.

ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $3F^{-1}(x) = x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x^2 - 4x - 7)\,G(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $(3x+1)^{-1} + (3x+1)^{-2} + (3x+1)^{-3} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ক. সমাধান কর : $y^2 + 4y - 3 = 0$. ২

খ. $x = \frac{2}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম 7 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩। (i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 18$.

(ii) $\frac{\log_k(4z-1)}{\log_k z} = 2$.

ক. $\left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে a^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. (i)নং থেকে প্রমাণ কর যে, $\log(x-y) = 2\log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$. ৪

গ. দেখাও যে, $z = 2 \pm \sqrt{3}$. ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪। ΔABC এর BC, AC এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F.

ক. একটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5cm, 6cm এবং 7cm হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র O হলে, প্রমাণ কর যে, ৪

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$.

গ. যদি BC বাহুটি M এবং N বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AM^2 + AN^2 + 4MN^2$. ৪

৫। $3x + 4y = 12$ সরলরেখাটি X অক্ষকে A বিন্দুতে এবং Y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। $C(-3, -4)$ এবং $D(4, -5)$ দুটি বিন্দু।

ক. A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর। ২

খ. $M(x, y)$ বিন্দুটি C ও D বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $y = 7x - 8$. ৪

গ. $ABCD$ চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগের অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬। (i) 4 cm ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 6 cm বহির্ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হলো।

(ii) $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু P এবং Q যেখানে $AB \parallel DC$ এবং $AB > DC$.

ক. নিরেট গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. ফাঁপা গোলকটির পুরুত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii)নং থেকে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,

$PQ \parallel AB \parallel DC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$. ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $A = \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta$.

ক. $\text{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ হলে, $\sec\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. $2AB = A$ এবং $0 \le \theta \le 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (i) একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) 42টি টিকেট 1 থেকে 42 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. শুধু একটি ছক্কা নিক্ষেপে 2 এর গুণিতক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (i)নং এর আলোকে probability tree তৈরি করে ছক্কায় জোড় সংখ্যা এবং মুদ্রায় টেল আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii)নং এর আলোকে টিকেটটির ক্রমিক নম্বর 20 এর গুণনীয়ক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	খ	৩	ঘ	৪	ক	৫	গ	৬	খ	৭	গ	৮	খ	৯	গ	১০	ক	১১	ঘ	১২	ঘ	১৩	গ
	১৪	খ	১৫	গ	১৬	ক	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	ঘ	২০	ক	২১	গ	২২	খ	২৩	গ	২৪	ঘ	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▸ ০১ (i) $F(x) = \dfrac{x}{2x+3}$

(ii) $G(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+9)}$.

ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $3F^{-1}(x) = x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x^2 - 4x - 7)\, G(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \dfrac{x}{2x+3}$

F(x) ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং

$2x + 3 \neq 0$ বা, $x \neq -\dfrac{3}{2}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $y = F(x)$

বা, $y = \dfrac{x}{2x+3}$

বা, $2xy + 3y = x$

বা, $2xy - x = -3y$

বা, $x - 2xy = 3y$

বা, $x(1 - 2y) = 3y$

বা, $x = \dfrac{3y}{1-2y}$

বা, $F^{-1}(y) = \dfrac{3y}{1-2y}$ [$\because$ $y = F(x)$ হলে $x = F^{-1}(y)$ হবে]

$\therefore F^{-1}(x) = \dfrac{3x}{1-2x}$

প্রশ্নমতে, $3F^{-1}(x) = x$

বা, $3 \times \dfrac{3x}{1-2x} = x$

বা, $\dfrac{9x}{1-2x} = x$

বা, $x - 2x^2 = 9x$

বা, $2x^2 + 8x = 0$

বা, $2x(x + 4) = 0$

হয়, $2x = 0$ অথবা, $x + 4 = 0$

$\therefore x = 0$ $\therefore x = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় x এর মান $= 0, -4$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $G(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+9)}$

প্রদত্ত রাশি $= (x^2 - 4x - 7)\, G(x)$

$= \dfrac{x^2 - 4x - 7}{(x-1)(x^2+9)}$

ধরি, $\dfrac{x^2 - 4x - 7}{(x-1)(x^2+9)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx + C}{x^2+9}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x^2+9)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 1)$ ... ... (ii)

বা, $x^2 - 4x - 7 \equiv Ax^2 + 9A + Bx^2 - Bx + Cx - C$

$\therefore x^2 - 4x - 7 \equiv (A + B)x^2 + (C - B)x + (9A - C)$ ... ... (iii)

(ii) নং এর উভয় পক্ষে x = 1 বসিয়ে পাই, $1 - 4 - 7 = A(1 + 9) + 0$

বা, $10A = -10$

$\therefore A = -1$

(iii) নং এ x^2 ও x এর সহগদ্বয় সমীকৃত করে পাই, $A + B = 1$

বা, $B = 1 - A = 1 - (-1) = 1 + 1$ $\therefore B = 2$

এবং $C - B = -4$

বা, $C = B - 4 = 2 - 4$ $\therefore C = -2$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x^2 - 4x - 7}{(x-1)(x^2+9)} = \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{2x-2}{x^2+9}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০২ $(3x + 1)^{-1} + (3x + 1)^{-2} + (3x + 1)^{-3} + \ldots\ \ldots.$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ক. সমাধান কর : $y^2 + 4y - 3 = 0$. ২

খ. $x = \dfrac{2}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম 7 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y^2 + 4y - 3 = 0$

সমীকরণটিকে $ay^2 + by + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 4$ এবং $c = -3$

$\therefore y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4.1(-3)}}{2.1}$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2}$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{4 \times 7}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$

$= \dfrac{2(-2 \pm \sqrt{7})}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $y = -2 \pm \sqrt{7}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটি

$(3x + 1)^{-1} + (3x + 1)^{-2} + (3x + 1)^{-3} + \ldots\ \ldots$

$= \dfrac{1}{3x+1} + \dfrac{1}{(3x+1)^2} + \dfrac{1}{(3x+1)^3} + \ldots\ \ldots\ \ldots$

$x = \dfrac{2}{3}$ হলে, ধারাটি $\dfrac{1}{3.\frac{2}{3} + 1} + \dfrac{1}{\left(3.\frac{2}{3} + 1\right)^2} + \dfrac{1}{\left(3.\frac{2}{3} + 1\right)^3} + \ldots\ \ldots\ \ldots$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots\ \ldots\ \ldots$

যার প্রথম পদ, $a = \dfrac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3^2} \times 3 = \dfrac{1}{3} < 1$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, [$\because$ r < 1]

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 7 পদের সমষ্টি, $S_7 = \frac{a(1 - r^7)}{1 - r}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^7}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\left(\frac{3^7 - 1}{3^7}\right)$$

$$= \frac{3^7 - 1}{2 \times 3^7} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

প্রদত্ত ধারা : $(3x + 1)^{-1} + (3x + 1)^{-2} + (3x + 1)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{1}{3x + 1} + \frac{1}{(3x + 1)^2} + \frac{1}{(3x + 1)^3} + \ldots\ldots\ldots$$

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x + 1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x + 1)^2} \div \frac{1}{3x + 1} = \frac{1}{3x + 1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

$\therefore \left|\frac{1}{3x + 1}\right| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < \frac{1}{3x + 1} < 1$

হয়, $\frac{1}{3x + 1} > -1$

বা, $3x + 1 < -1$

বা, $3x < -1 - 1$

বা, $3x < -2$

$\therefore x < -\frac{2}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x + 1} < 1$

বা, $3x + 1 > 1$

বা, $3x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $3x > 0$

$\therefore x > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{2}{3}$ অথবা $x > 0$ **(Ans.)**

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$$= \frac{\frac{1}{3x + 1}}{1 - \frac{1}{3x + 1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3x + 1}}{\frac{3x + 1 - 1}{3x + 1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3x + 1}}{\frac{3x}{3x + 1}}$$

$$= \frac{1}{3x + 1} \times \frac{3x + 1}{3x}$$

$$= \frac{1}{3x} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ০৩ (i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 18.$

(ii) $\frac{\log_k(4z - 1)}{\log_k z} = 2.$

ক. $\left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে a^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. (i)নং থেকে প্রমাণ কর যে, $\log(x - y) = 2\log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y.$ ৪

গ. দেখাও যে, $z = 2 \pm \sqrt{3}.$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশিকে বিস্তৃত করে পাই,

$$\left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^6 = 1 + \binom{6}{1} \times 1 \times \frac{a^2}{2} + \binom{6}{2} \times 1 \times \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \binom{6}{3} \times 1 \times \left(\frac{a^2}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 6 \times \frac{a^2}{2} + 15 \times \frac{a^4}{4} + 20 \times \frac{a^6}{8} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 3a^2 + \frac{15}{4}a^4 + \frac{5}{2}a^6 + \ldots\ldots\ldots$$

$\therefore \left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে a^6 এর সহগ $= \frac{5}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 18$

বা, $\frac{x^2 + y^2}{xy} = 18$

বা, $x^2 + y^2 = 18xy$

বা, $x^2 + y^2 - 2xy = 16xy$

বা, $(x - y)^2 = 16xy$

বা, $\log(x - y)^2 = \log 16xy$ [উভয়পক্ষে log নিয়ে]

বা, $2\log(x - y) = \log 16 + \log x + \log y$

বা, $2\log(x - y) = \log 2^4 + \log x + \log y$

বা, $2\log(x - y) = 4\log 2 + \log x + \log y$

বা, $\log(x - y) = \frac{4}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$

$\therefore \log(x - y) = 2\log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(4z - 1)}{\log_k z} = 2$

বা, $\log_k(4z - 1) = 2\log_k z$

বা, $\log_k(4z - 1) = \log_k z^2$

বা, $4z - 1 = z^2$

বা, $z^2 - 4z + 1 = 0$

বা, $z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

বা, $z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{2}$

$\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ০৪ ΔABC এর BC, AC এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং $F.$

ক. একটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5cm, 6cm এবং 7cm হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র O হলে, প্রমাণ কর যে, ৪

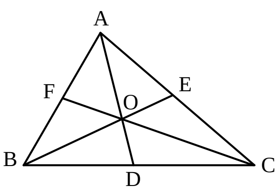
$OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$

গ. যদি BC বাহুটি M এবং N বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AM^2 + AN^2 + 4MN^2.$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = x cm
আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,
$3 \times$ (অতিভুজের বর্গ) = $2 \times$ (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি)
বা, $3 \times x^2 = 2 \times (5^2 + 6^2 + 7^2)$
বা, $x^2 = \frac{2}{3} \times 110$
বা, $x^2 = \frac{220}{3}$
বা, $x = \sqrt{\frac{220}{3}}$
$\therefore x = 8.56$ cm (প্রায়) **(Ans.)**

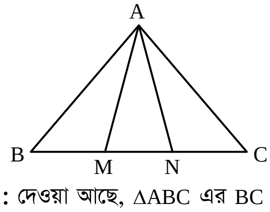
খ



ΔABC-এর BC, AC এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F। অর্থাৎ AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা, যারা পরস্পর ভরকেন্দ্র O তে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

প্রমাণ: ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।
$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)
$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)
এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)
এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,
$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$
বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$
বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ... ... (iv)
আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।
$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$ বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]
বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$ বা, $2AD = 3AO$ বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]
অনুরূপে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$
$\therefore$ (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$
বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(AO^2 + BO^2 + CO^2)$
বা, $OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{3}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$
$\therefore OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়। অর্থাৎ, BM = MN = CN।
A, M ও A, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 + AC^2 = AM^2 + AN^2 + 4MN^2$.
প্রমাণ : ΔABN এর মধ্যমা AM
$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AB^2 + AN^2 = 2(AM^2 + MN^2)$ ... ... (i)
আবার, ΔAMC এ মধ্যমা AN
$\therefore AM^2 + AC^2 = 2(AN^2 + MN^2)$ ... ... (ii)
এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$AB^2 + AN^2 + AM^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2MN^2 + 2AN^2 + 2MN^2$
বা, $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2AN^2 + 4MN^2 - AM^2 - AN^2$
$\therefore AB^2 + AC^2 = AM^2 + AN^2 + 4MN^2$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ $3x + 4y = 12$ সরলরেখাটি X অক্ষকে A বিন্দুতে এবং Y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। $C(-3, -4)$ এবং $D(4, -5)$ দুটি বিন্দু।

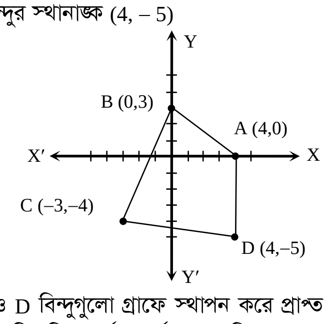
ক. A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর। ২
খ. $M(x, y)$ বিন্দুটি C ও D বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $y = 7x - 8$. ৪
গ. $ABCD$ চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগের অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $3x + 4y = 12$ সরল রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে।
$\therefore$ রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করায় A বিন্দুর $y = 0$ হবে।
$\therefore 3x + 4.0 = 12$ বা, $x = \frac{12}{3} = 4$
$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0) **(Ans.)**
আবার, রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করায় B বিন্দুর $x = 0$ হবে।
$\therefore 3.0 + 4y = 12$ বা, $y = \frac{12}{4} = 3$
$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3). **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 3, – 4) ও (4, – 5)
$\therefore$ M(x, y) হতে C বিন্দুর দূরত্ব $MC = \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 4)^2}$ একক
এবং M(x, y) হতে D বিন্দুর দূরত্ব $MD = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 5)^2}$ একক
শর্তমতে, MC = MD
বা, $\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 5)^2}$
বা, $x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25$
বা, $14x - 2y - 16 = 0$
বা, $7x - y - 8 = 0$
$\therefore y = 7x - 8$ **(দেখানো হলো)**

গ 'ক' হতে পাই,
A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0), B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3)
দেওয়া আছে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 3, – 4)
এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, – 5)



A, B, C ও D বিন্দুগুলো গ্রাফে স্থাপন করে প্রাপ্ত ABCD চতুর্ভুজের D(4, – 5) বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। CD রেখার সমীকরণ,
$\frac{y + 4}{-4 + 5} = \frac{x + 3}{-3 - 4}$
বা, $\frac{y + 4}{1} = \frac{x + 3}{-7}$
বা, $x + 3 = -7y - 28$
বা, $x + 7y + 31 = 0$

CD রেখা যে বিন্দুতে y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর ভুজ $x = 0$

$\therefore 0 + 7y + 31 = 0$

বা, $7y = -31$ $\therefore y = -\frac{31}{7}$

$\therefore$ CD রেখা y অক্ষকে $E\left(0, -\frac{31}{7}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABCD চতুর্ভুজের OEDA অংশটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। যেখানে O(0, 0) হলো মূলবিন্দু।

$\therefore$ OEDA অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{31}{7} & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left|(0+0+0+0) - \left(0 - \frac{124}{7} - 20 + 0\right)\right|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left|0 + \frac{124}{7} + 20 + 0\right|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times \frac{264}{7}$ বর্গএকক

$= \frac{132}{7}$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ (*i*) 4 cm ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 6 cm বহির্ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হলো।
(*ii*) *ABCD* ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু *P* এবং *Q* যেখানে $AB \parallel DC$ এবং $AB > DC$.

ক. নিরেট গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. ফাঁপা গোলকটির পুরুত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. (*ii*)নং থেকে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AB \parallel DC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$. ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = 4$ cm

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$

$= (4 \times 3.1416 \times 4^2)$ বর্গ সেমি

$= 201.06$ বর্গ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ নিরেট গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 4^3$ ঘন সেমি

$= 268.08$ ঘন সেমি (প্রায়)

যেহেতু নিরেট গোলককে গলিয়ে ফাঁপা গোলক তৈরি করা হয়েছে,

$\therefore$ ফাঁপা গোলকের লোহার আয়তন $= 268.08$ ঘন সেমি (প্রায়)

ধরি, ফাঁপা গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধ $= r_1$ সেমি

দেওয়া আছে, ফাঁপা গোলকের বহিঃব্যাসার্ধ $r_2 = 6$ সেমি

শর্তমতে, $\frac{4}{3} \times \pi \times r_2^3 - \frac{4}{3} \times \pi r_1^3 = 268.08$

বা, $\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3) = 268.08$

বা, $6^3 - r_1^3 = 64$ [$\because r_2 = 6$ সেমি]

বা, $216 - r_1^3 = 64$

বা, $r_1^3 = 216 - 64$

বা, $r_1^3 = 152$

$\therefore r_1 = 5.337$

$\therefore$ ফাঁপা গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধ $= 5.337$ সেমি (প্রায়)

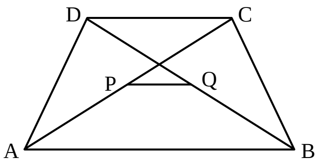
$\therefore$ ফাঁপা গোলকটির পুরুত্ব

$=$ (গোলকের বহিঃব্যাসার্ধ – গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধ)

$= (6 - 5.337)$ সেমি

$= 0.663$ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

গ



ABCD ট্রাপিজিয়ামের AC এবং BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ \parallel AB \parallel DC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$ [$\because$ P, AC এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$ [$\because$ Q, BD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$= \frac{1}{2}(b + d - a - c)$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) - (\underline{c} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$

$DC \parallel AB$ হওয়ায় $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{DC}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{DC}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

কারণ, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$

বা, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right|$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$

$\therefore PQ \parallel AB \parallel DC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $A = \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta$.

ক. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ হলে, $\sec\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. $2AB = A$ এবং $0 \le \theta \le 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $\operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{5}{4}$

বা, $\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{5}{4}$

বা, $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$

বা, $1 - \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

বা, $\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{5}$

বা, $\frac{1}{\sec^2\alpha} = \frac{5-4}{5}$ বা, $\frac{1}{\sec^2\alpha} = \frac{1}{5}$

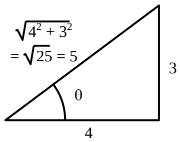
বা, $\sec^2\alpha = 5$ বা, $\sec\alpha = \pm\sqrt{5}$

যেহেতু, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ বলে α দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\sec\alpha$ এর মান ঋণাত্মক।

$\therefore \sec\alpha = -\sqrt{5}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \sin\theta$ ও $B = \cos\theta$

এবং $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$



বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ [$\because$ $\sin\theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \cos\theta = -\frac{4}{5}$ [$\because$ $\tan\theta$ ধনাত্মক এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক তাই θ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং তৃতীয় চতুর্ভাগে $\cos\theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$$= \frac{\frac{-4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{-5}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{-4-3}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-2}{4}} = \left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{2}\right)$$

$= \frac{14}{5} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $2AB = A$

বা, $2\sin\theta \cos\theta = \sin\theta$

বা, $2\sin\theta \cos\theta - \sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta = \sin 0 = \sin\pi = \sin 2\pi$ [$\because 0 \le \theta \le 2\pi$]

$\therefore \theta = 0, \pi, 2\pi$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ [$\because 0 \le \theta < 2\pi$]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ধারিত সীমার মধ্যে θ এর মান $= 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (*i*) একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। (*ii*) 42টি টিকেট 1 থেকে 42 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. শুধু একটি ছক্কা নিক্ষেপে 2 এর গুণিতক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (*i*)নং এর আলোকে probability tree তৈরি করে ছক্কায় জোড় সংখ্যা এবং মুদ্রায় টেল আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. (*ii*)নং এর আলোকে টিকেটটির ক্রমিক নম্বর 20 এর গুণনীয়ক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

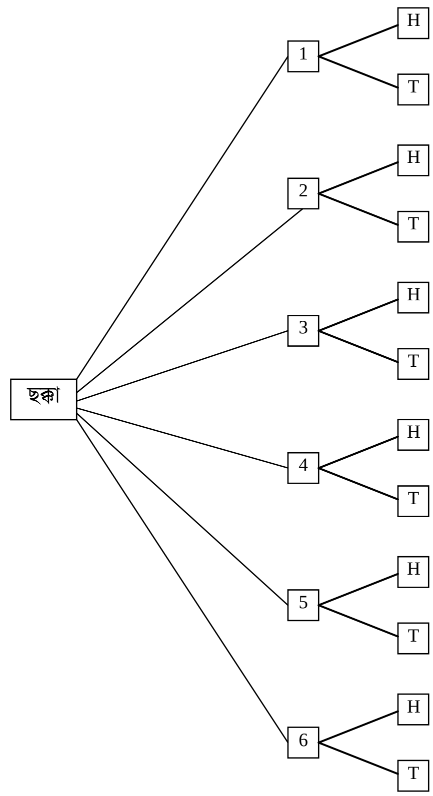
অর্থাৎ নমুনাবিন্দু 6টি।

$\therefore$ 2 এর গুণিতক আসার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র = {2, 4, 6}

অর্থাৎ, 3টি।

$\therefore$ 2 এর গুণিতক আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree নিম্নে দেখানো হলো :



$\therefore$ নমুনা ক্ষেত্র, S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 12টি

ছক্কায় জোড় সংখ্যা ও মুদ্রায় টেল পাওয়ার অনুকূল ফলাফল 2T, 4T, 6T অর্থাৎ, 3টি।

$\therefore$ ছক্কায় জোড় সংখ্যা ও মুদ্রায় টেল পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

গ 1 থেকে 42 পর্যন্ত মোট টিকেট সংখ্যা 42টি।

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 42

20 এর গুণনীয়কের সেট = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

$\therefore$ অনুকূল নমুনাবিন্দু = 6

$\therefore$ দৈবভাবে নেওয়া টিকেটটি 20 এর গুণনীয়ক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{42}$

$= \frac{1}{7}$ **(Ans.)**

যশোর বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $a > b$ এবং $c < 0$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ $ac > bc$ ⓚh $ac \geq bc$ ⓖ $ac \leq bc$ ⓖh $ac < bc$

২. $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কোনটি?
ⓚ $-\frac{1}{8}$ ⓚh $-\frac{5}{2}$ ⓖ $\frac{1}{8}$ ⓖh $\frac{5}{2}$

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$2x + y = 11$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

৩. i. সরলরেখাটির ঢাল $\frac{1}{2}$
ii. x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সরলরেখাটি স্থূলকোণ উৎপন্ন করে
iii. সরলরেখাটির y-অক্ষের ছেদাংশ 11 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

৪. সরলরেখাটির উপর P(a, 3) বিন্দুটি অবস্থিত হলে, মূলবিন্দু হতে P বিন্দুর দূরত্ব কত একক?
ⓚ 11 ⓚh 5 ⓖ 4 ⓖh 3

৫. $f(x) = \frac{x-3}{2x-3}$ এর বিপরীত ফাংশন নিচের কোনটি?
ⓚ $\frac{3x-1}{2x-1}$ ⓚh $\frac{3x-1}{x-2}$ ⓖ $\frac{3(x-1)}{x-2}$ ⓖh $\frac{3(x-1)}{2x-1}$

৬. A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c এবং AB রেখাংশকে C বিন্দুটি 2 : 3 ভাগে অন্তঃবিভক্ত করলে $\underline{c}$ = কত?
ⓚ $\frac{3\underline{b} + 2\underline{a}}{5}$ ⓚh $\frac{2\underline{b} + 3\underline{a}}{5}$ ⓖ $3\underline{b} - 2\underline{a}$ ⓖh $2\underline{b} - 3\underline{a}$

৭. একটি গোলকের ব্যাস 4r একক হলে, এর আয়তন কত ঘন একক?
ⓚ $\frac{2}{3}\pi r^3$ ⓚh $\frac{8}{3}\pi r^3$ ⓖ $4\pi r^3$ ⓖh $\frac{32}{3}\pi r^3$

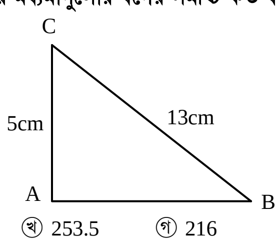
৮. $ax^2 + 9 = 6x$ সমীকরণের নিশ্চায়ক '0' হলে, a = কত?
ⓚ 36 ⓚh 9 ⓖ 2 ⓖh 1

□ **নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৯ ও ১০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = p$

৯. $\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta$ = কত?
ⓚ $-\frac{1}{p}$ ⓚh $-p$ ⓖ $\frac{1}{p}$ ⓖh $\frac{1}{p^2}$

১০. $\sec\theta$ এর মান নিচের কোনটি?
ⓚ $\frac{2p}{p^2+1}$ ⓚh $\frac{2p}{p^2-1}$ ⓖ $\frac{p^2+1}{p^2-1}$ ⓖh $\frac{p^2-1}{p^2+1}$

১১. ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত বর্গ সে.মি.?



ⓚ 507 ⓚh 253.5 ⓖ 216 ⓖh 112.67

১২. $x^a = y$, $y^b = z$ এবং $z^c = x$ হলে 'abc' এর মান কত?
ⓚ −1 ⓚh 0 ⓖ 1 ⓖh 10

□ **নিচের উদ্দীপকের আলোকে ১৩ ও ১৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
একটি ঝুড়িতে 12টি নীল, 4টি সাদা ও 8টি কালো বল আছে। দৈবভাবে একটি বল নেয়া হলো।

১৩. বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ⓚ $\frac{5}{6}$ ⓚh $\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{1}{6}$ ⓖh $\frac{1}{3}$

১৪. বলটি নীল না হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ⓚ 0 ⓚh $\frac{1}{24}$ ⓖ $\frac{2}{3}$ ⓖh $\frac{1}{24}$

১৫. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ হলে–
i. S এর লেখচিত্রটি একটি বৃত্ত
ii. $-5 \leq y \leq 0$, শর্তে, S একটি ফাংশন
iii. $0 \leq y \leq 5$ শর্তে S একটি ফাংশন
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

১৬. (0, 3) এবং (a, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $\frac{1}{4}$ হলে, a এর মান কত?
ⓚ −8 ⓚh −4 ⓖ 4 ⓖh 8

১৭. $\frac{x+3}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-5} - \frac{1}{x-1}$ হলে, A = কত?
ⓚ −2 ⓚh −1 ⓖ 1 ⓖh 2

১৮. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\pi < \theta < 2\pi$ হলে $\cos\theta$ = কত?
ⓚ $\frac{12}{13}$ ⓚh $\frac{5}{13}$ ⓖ $-\frac{12}{13}$ ⓖh $-\frac{5}{13}$

১৯. $f(y) = 3x^2y^4 - 5xy^5 + 2x^4y^2 - 4$ বহুপদীর–
i. মাত্রা '6' ii. মুখ্য সহগ '−5x' iii. ধ্রুব পদ '−4'
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

২০. একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস 8 সে.মি. হলে, ইহার নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সেমি?
ⓚ 2 ⓚh 4 ⓖ 8 ⓖh 16

২১. যদি n(A) = 4 এবং n(B) = 7 যেখানে, A ও B নিশ্ছেদ সেট হলে, $n(A \cup B)$ = কত?
ⓚ 3 ⓚh 4 ⓖ 11 ⓖh 28

২২. $\sin 9A = \cos 9A$ হলে–
i. $\operatorname{cosec} 6A = 2$ ii. $\sec 9A = \sqrt{2}$
iii. $\cot 12A = \sqrt{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

২৩. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে বৃত্তের সর্বোচ্চ কতটি স্পর্শক আঁকা যায়?
ⓚ 1 ⓚh 2 ⓖ 4 ⓖh অসংখ্য

□ **নিচের উদ্দীপকের আলোকে ২৪ ও ২৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

২৪. 'x' এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসমীতক সমষ্টি থাকবে?
ⓚ $x < 0$ অথবা $x > -1$ ⓚh $x > 0$ অথবা $x < -1$
ⓖ $x \leq 0$ অথবা $x \geq -1$ ⓖh $x \geq 0$ অথবা $x \leq -1$

২৫. x = 1 হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
ⓚ $\frac{1}{3}$ ⓚh $\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{3}{2}$ ⓖh 2

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

যশোর বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট

পূর্ণমান : ৫০

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}$ এবং $A = \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

ক. $f(P) = k$ হলে, P এর মান k এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $f^{-1}(-3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. A কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। (i) $F(x) = \frac{\log_k(5x+3)}{\log_k x}$

(ii) $(2x+1)^{-1} + (2x+1)^{-2} + (2x+1)^{-3} + \ldots \ldots \ldots$

ক. $x^2 = y^3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{3}}$. ২

খ. $F(x) = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (ii)নং এ বর্ণিত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩। $A = (1+2x)^7$, $B = (1-2x)^8$.

ক. $2^{x-4} = 4a^{x-6}$ $(a > 0, a \neq 2)$ এর সমাধান কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে চারপদ পর্যন্ত বিস্তৃত করে $(0.99)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

গ. AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪। ABC ত্রিভুজের ভূমি a, শিরঃকোণ x এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 2 সে.মি.।

ক. একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 12 সে.মি. হলে এর মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন করো। ৪

গ. ΔABC এর মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$. ৪

৫। $ABCD$ চতুর্ভুজে শীর্ষবিন্দু চারটি যথাক্রমে $A(0, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(6, 7)$ এবং $D(8, 3)$.

ক. দেখাও যে, $AB \parallel CD$. ২

খ. দেখাও যে, A, B, C ও D বিন্দু চারটি একটি আয়তের শীর্ষবিন্দু। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3x - 2y = 2$, AC এবং AB রেখা তিনটি সমবিন্দু। ৪

৬। (i) $\frac{44}{\pi}$ সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।

(ii) $ABCD$ সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণ

ক. 5 সে. মি. ব্যাসার্ধ ও 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AC এবং BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

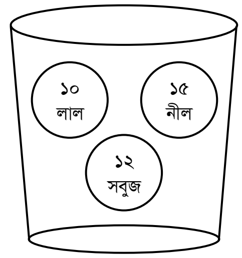
৭। $A = x\cos\theta$, $B = y\sin\theta$

ক. সকাল 8 : 30 টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে ডিগ্রিতে নির্ণয় কর। ২

খ. $A + B = Z$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x\sin\theta - y\sin\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. ৪

গ. $x^2 = 3$, $y^2 = 7$ এবং $A^2 + B^2 = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। (যখন $0 < \theta < 2\pi$). ৪

৮।



ঝুড়ি

দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একসাথে নিক্ষেপ করা হলো।

ক. দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হলে মার্বেলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. দুইটি ছক্কায় প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি ১০ অপেক্ষা বড় হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর পাঁচটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	খ	৩	গ	৪	খ	৫	ঘ	৬	খ	৭	ঘ	৮	ঘ	৯	ক	১০	গ	১১	খ	১২	গ	১৩	ক
	১৪	খ	১৫	ঘ	১৬	খ	১৭	ঘ	১৮	গ	১৯	গ	২০	ক	২১	গ	২২	ক	২৩	খ	২৪	খ	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}$ এবং $A = \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

ক. $f(P) = k$ হলে, P এর মান k এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $f^{-1}(-3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. A কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}$ $\therefore f(P) = \frac{4P-9}{P-2}$

প্রশ্নমতে, $f(P) = k$

বা, $\frac{4P-9}{P-2} = k$ বা, $4P - 9 = Pk - 2k$

বা, $4P - Pk = 9 - 2k$ বা, $P(4 - k) = 9 - 2k$

$\therefore P = \frac{9-2k}{4-k}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}$

ধরি, $y = f(x)$

বা, $y = \frac{4x-9}{x-2}$

বা, $xy - 2y = 4x - 9$ বা, $xy - 4x = 2y - 9$

বা, $x(y-4) = 2y - 9$ বা, $x = \frac{2y-9}{y-4}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{2y-9}{y-4}$ $[\because y = f(x) \therefore x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(-3) = \frac{2\times(-3)-9}{-3-4} = \frac{-6-9}{-7} = \frac{15}{7}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{2(x-1)(x-2)(x-3) + 2x^3 - 2(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= 2 + \frac{2x^3 - 2(x^2-3x+2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= 2 + \frac{2x^3 - (2x^2-6x+4)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= 2 + \frac{2x^3 - (2x^3-6x^2+4x-6x^2+18x-12)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= 2 + \frac{2x^3 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 6x^2 - 18x + 12}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= 2 + \frac{12x^2 - 22x + 12}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ধরি, $\frac{12x^2-22x+12}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{D}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $12x^2 - 22x + 12 \equiv D(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

বা, $12x^2 - 22x + 12 \equiv D(x^2-5x+6) + B(x^2-4x+3) + C(x^2-3x+2)$

বা, $12x^2 - 22x + 12 \equiv (D+B+C)x^2 + (-5D-4B-3C)x + 6D + 3B + 2C$ ... ... (ii)

(ii) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে যথাক্রমে x^2, x ও ধ্রুবক পদের সহগ সমীকৃত করে পাই, $D + B + C = 12$ ... ... (iii)

$-5D - 4B - 3C = -22$ ... ... (iv)

$6D + 3B + 2C = 12$ ... ... (v)

(iv) হতে পাই, $-5D - 5B - 5C + B + 2C = -22$

বা, $-5(D+B+C) + B + 2C = -22$

বা, $-60 + B + 2C = -22$ [(iii) হতে]

$\therefore B + 2C = 38$ ... ... (vi)

(v) হতে পাই, $6D + 6B + 6C - 3B - 4C = 12$

বা, $6(D+B+C) - 3B - 4C = 12$

বা, $72 - 3B - 4C = 12$ [$\because$ (iii) হতে]

$\therefore 3B + 4C = 60$ ... ... (vii)

(vii) $- 2\times$ (vi) হতে, $3B + 4C - 2B - 4C = -16$ $\therefore B = -16$

(vi) হতে, $-16 + 2C = 38$

বা, $2C = 54$ $\therefore C = 27$

(iii) হতে, $D - 16 + 27 = 12$ $\therefore D = 1$

D, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণের বসিয়ে পাই,

$A = 2 + \frac{D}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$\therefore \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{16}{x-2} + \frac{27}{x-3}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ (i) $F(x) = \frac{\log_k(5x+3)}{\log_k x}$

(ii) $(2x+1)^{-1} + (2x+1)^{-2} + (2x+1)^{-3} + ...$

ক. $x^2 = y^3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{3}}$. ২

খ. $F(x) = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (ii)নং এ বর্ণিত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 = y^3$ $\therefore x = y^{\frac{3}{2}}$

আবার, $x^2 = y^3$ বা, $y^3 = x^2$ $\therefore y = x^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{y}$ $[\because x = y^{\frac{3}{2}}, y = x^{\frac{2}{3}}]$

$= x^{\frac{3}{2}-1} + y^{\frac{2}{3}-1} = x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{3}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{3}}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{\log_k(5x+3)}{\log_k x}$; $F(x) = 2$ হলে, $\frac{\log_k(5x+3)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(5x+3) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(5x+3) = \log_k x^2$

বা, $x^2 = 5x + 3$ [উভয়পক্ষে antilog নিয়ে]

বা, $x^2 - 5x - 3 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

এখানে, $\frac{5-\sqrt{37}}{2} < 0$, যা গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারার ১ম পদ, $a = \frac{1}{2x+1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x+1)^2} \div \frac{1}{(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{2x+1}\right| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < \frac{1}{2x+1} < 1$ হয়।

$\therefore -1 < \frac{1}{2x+1}$

বা, $-1 > 2x + 1$

বা, $-1 - 1 > 2x + 1 - 1$

বা, $-2 > 2x$

$\therefore x < -1$

অথবা, $\frac{1}{2x+1} < 1$

বা, $2x + 1 > 1$

বা, $2x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $2x > 0$

$\therefore x > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < -1$ অথবা $x > 0$ **(Ans.)**

আবার, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{1 - \frac{1}{2x+1}} = \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x+1-1}{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{2x+1} \times \frac{2x+1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ $A = (1 + 2x)^7, B = (1 - 2x)^8$.

ক. $2^{x-4} = 4a^{x-6}$ $(a > 0, a \neq 2)$ এর সমাধান কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে চারপদ পর্যন্ত বিস্তৃত করে $(0.99)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

গ. AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2^{x-4} = 4a^{x-6}$

বা, $2^{x-4} = 2^2.a^{x-6}$

বা, $a^{x-6} = \frac{2^{x-4}}{2^2}$

বা, $a^{x-6} = 2^{x-4-2} = 2^{x-6}$

বা, $\frac{2^{x-6}}{a^{x-6}} = 1 = \left(\frac{2}{a}\right)^0$

$\therefore x - 6 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = (1 + 2x)^7$

$$= 1 + \binom{7}{1}(2x)^1 + \binom{7}{2}(2x)^2 + \binom{7}{3}(2x)^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + 14x + 84x^2 + 280x^3 + \dots\dots$$

এখন $(1 + 2x)^7$ কে $(0.99)^7$ এর তুলনা করে পাই,

$1 + 2x = 0.99$ বা, $2x = -0.01$ $\therefore x = -0.005$

এখন, $x = -0.005$ বিস্তৃতিতে বসিয়ে পাই,

$(0.99)^7 = 1 + 14(-0.005) + 84(-0.005)^2 + 280(-0.005)^3 + \dots\dots$

$= 0.9321$ (প্রায়) (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত) **(Ans.)**

বিশেষ দ্রষ্টব্য : এখানে, $A = (1 + 2x)^7$ এর ঘাত 7 এবং $(0.99)^8$ এর ঘাত 8. কিন্তু উভয় রাশির ঘাত সমান নয়। তাই $(0.99)^8$ এর পরিবর্তে $(0.99)^7$ ব্যবহার করে সমাধান দেওয়া হলো।

গ দেওয়া আছে, $A = (1 + 2x)^7$ এবং $B = (1 - 2x)^8$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= AB = (1 + 2x)^7(1 - 2x)^8$

$= (1 + 2x)^7(1 - 2x)^7(1 - 2x) = (1 - 4x^2)^7(1 - 2x)$

$= (1 - 2x)\{1 + {}^7C_1(-4x^2)^1 + {}^7C_2(-4x^2)^2 + {}^7C_3(-4x^2)^3 + {}^7C_4(-4x^2)^4 + \dots\dots\}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতি থেকে পাই, x^7 এর সহগ $= -2 \times {}^7C_3 \times (-4)^3$

$= 4480$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৪ ABC ত্রিভুজের ভূমি a, শিরঃকোণ x এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 2 সে.মি.।

ক. একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 12 সে.মি. হলে এর মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন করো। ৪

গ. ΔABC এর মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি

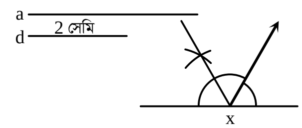
শর্তমতে, $3a = 12$ $\therefore a = 4$

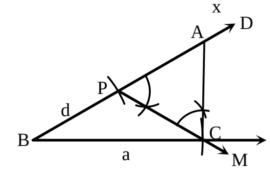
সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে, প্রতিটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore$ মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি $= \frac{3\sqrt{3}}{2}a = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times 4\right)$ সেমি

$= 6\sqrt{3}$ সেমি **(Ans.)**

খ মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, শিরঃকোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d = 2 সেমি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





অঙ্কনের বিবরণ :

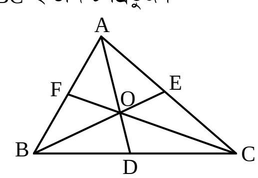
(১) যেকোনো রশ্মি BD থেকে BP = d = 2 সেমি কেটে নিই।

(২) P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি।

(৩) B কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে। B, C যোগ করি।

(৪) C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ আঁকি যেন CA রেখাংশ BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ **বিশেষ নির্বচন :** ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$



প্রমাণ: ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ... ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$ বা, $2AD = 3AO$ বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$

$\therefore$ (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ *ABCD* চতুর্ভুজে শীর্ষবিন্দু চারটি যথাক্রমে $A(0, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(6, 7)$ এবং $D(8, 3)$.

ক. দেখাও যে, $AB \parallel CD$. ২

খ. দেখাও যে, *A, B, C* ও *D* বিন্দু চারটি একটি আয়তের শীর্ষবিন্দু। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3x - 2y = 2$, *AC* এবং *AB* রেখা তিনটি সমবিন্দু। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(0, – 1), B(– 2, 3), C(6, 7) ও D(8, 3)

AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3+1}{-2-0} = \frac{4}{-2} = -2$

CD রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{3-7}{8-6} = \frac{-4}{2} = -2$

এখানে, $m_1 = m_2$; অর্থাৎ সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল সমান।

$\therefore AB || CD$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(0, –1), B(– 2, 3), C(6, 7) এবং D(8, 3)

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2+0)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-8)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ একক

এখন, AB = CD এবং BC = AD বলে চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলোর সমান। তাই চতুর্ভুজটি আয়ত কিংবা সামান্তরিক হবে।

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$ একক

অর্থাৎ, AC কর্ণ = BD কর্ণ

∴ চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয় ও পরস্পর সমান। তাই, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, A(0, – 1), B(– 2, 3) ও C(6, 7)

AC রেখার সমীকরণ, $\frac{x-0}{0-6} = \frac{y+1}{-1-7}$

বা, $\frac{x}{-6} = \frac{y+1}{-8}$

বা, $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{4}$

বা, $4x = 3y + 3$

$\therefore x = \frac{3y+3}{4}$ ... ... (i)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-0}{0+2} = \frac{y+1}{-1-3}$

বা, $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-4}$

বা, $-2x = y + 1$

$\therefore x = \frac{y+1}{-2}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) হতে, $\frac{3y+3}{4} = -\frac{y+1}{2}$;

[∵ AB ও AC রেখার ছেদবিন্দুতে উভয় রেখার স্থানাঙ্ক (x, y) একই]

বা, $3y + 3 = -2y - 2$

বা, $5y = -5$ ∴ $y = -1$

(ii) হতে, $x = \frac{-1+1}{-2} = 0$

∴ AC ও AB রেখার ছেদবিন্দু (0, – 1)

এখন, প্রদত্ত রেখার বামপক্ষ = 3x – 2y

= 3.0 – 2(– 1) = 0 + 2 = 2 = ডানপক্ষ

∴ (0, – 1) বিন্দু 3x – 2y = 2 রেখার উপর অবস্থিত।

অর্থাৎ, 3x – 2y = 2, AC এবং AB রেখা তিনটি সমবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ *(i)* $\frac{44}{\pi}$ সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।

(ii) *ABCD* সামান্তরিকের *AC* ও *BD* কর্ণ

ক. 5 সে. মি. ব্যাসার্ধ ও 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, *AC* এবং *BD* কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ, r = 5 সেমি

এবং সিলিন্ডারের উচ্চতা, h = 12 সেমি

∴ সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi rh$ বর্গ একক

$= 2 \times \pi \times 5 \times 12$ বর্গ সেমি

= 376.992 বর্গ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাস, $\frac{44}{\pi}$ সেমি

অতএব, গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{22}{\pi}$ সেমি = 7.0028 সেমি (প্রায়)

যেহেতু, গোলকটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়

সেহেতু, ঘনকের বাহু হবে গোলকের ব্যাসের সমান।

∴ ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য, $2r = 2 \times \frac{22}{\pi}$ সেমি = 14.0056 সেমি (প্রায়)

∴ ঘনকের আয়তন = (ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য)^3 ঘনএকক

= $(14.0056)^3$ ঘন সেমি

= 2747.3 ঘন সেমি (প্রায়)

এবং গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘনএকক

= $\frac{4}{3}\pi \times (7.0028)^3$ ঘন সেমি

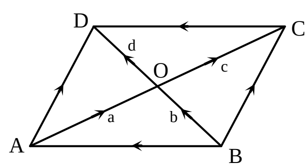
= 1438.48 ঘন সেমি (প্রায়)

∴ অনধিকৃত অংশের আয়তন = ঘনকের আয়তন – গোলকের আয়তন

= (2747.3 – 1438.48) ঘন সেমি

= 1308.82 ঘন সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

গ ধরি, ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



মনে করি, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BO} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$. প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$, $|\underline{b}| = |\underline{d}|$. অর্থাৎ, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল,

সুতরাং $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয়পক্ষে – c – d যোগ করে]

এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC ∴ $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC।

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD ∴ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD।

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে।

কিন্তু AC, BD দুইটি পরস্পচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

∴ $\underline{a} - \underline{c} = \underline{0}$ বা, $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = \underline{0}$ বা, $\underline{b} = \underline{d}$ ∴ $|\underline{a}| = |\underline{c}|$, $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

∴ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

অর্থাৎ, AC এবং BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $A = x\cos\theta$, $B = y\sin\theta$

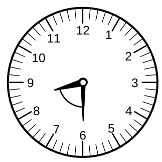
ক. সকাল 8 : 30 টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে ডিগ্রিতে নির্ণয় কর। ২

খ. $A + B = Z$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x\sin\theta - y\sin\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. ৪

গ. $x^2 = 3, y^2 = 7$ এবং $A^2 + B^2 = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। (যখন $0 < \theta < 2\pi$). ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক



আমরা জানি,

ঘড়িতে সর্বমোট 12টি ঘন্টার দাগ কাটা থাকে।

$\therefore$ ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 12 ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে = $360°$

$\therefore$ ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 1 ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে = $\frac{360°}{12} = 30°$

$\therefore$ ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 1 মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে = $\frac{30°}{60} = 0.5°$

[$\because$ 1 ঘন্টা = 60 মি.]

$\therefore$ ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 30 মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে = 0.5×30
$= 15°$

$\therefore$ সকাল 8:30 টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ = $2 \times 30° + 15° = 60° + 15° = 75°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$ ও $B = y\sin\theta$

এবং $A + B = z$

বা, $x\cos\theta + y\sin\theta = z$

বা, $(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = z^2$

বা, $x^2\cos^2\theta + 2.x.\cos\theta.y\sin\theta + y^2\sin^2\theta = z^2$

বা, $x^2(1 - \sin^2\theta) + 2xy\sin\theta.\cos\theta + y^2(1 - \cos^2\theta) = z^2$

বা, $x^2 - x^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta.\cos\theta + y^2 - y^2\cos^2\theta = z^2$

বা, $(x\sin\theta)^2 - 2.x\sin\theta.y\cos\theta + (y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

বা, $(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

$\therefore x\sin\theta - y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ **(প্রমাণিত)**

[Note : প্রশ্নটি সজাতিপূর্ণ নয়। $x\cos\theta + y\sin\theta = z$ হলে, $x\sin\theta - y\sin\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ প্রমাণ সম্ভব নয়। তাই, $x\sin\theta - y\sin\theta$ এর পরিবর্তে $x\sin\theta - y\cos\theta$ ধরা হয়েছে।]

গ দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$, $B = y\sin\theta$ এবং $x^2 = 3$, $y^2 = 7$

এখানে, $A^2 + B^2 = 4$

বা, $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ [মান বসিয়ে]

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ হলে,

$\sin\theta$ ১ম ও ২য় চতুর্ভাগে ধনাত্মক,

১ম চতুর্ভাগে, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

২য় চতুর্ভাগে, $\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ হলে, $\sin\theta$ ৩য় ও ৪র্থ চতুর্ভাগে ঋণাত্মক।

৩য় চতুর্ভাগে, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

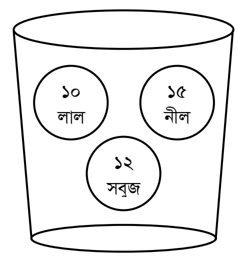
বা, $\theta = \pi + \frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}$

৪র্থ চতুর্ভাগে, $\sin\theta = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore 0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮



ঝুড়ি

দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একসাথে নিক্ষেপ করা হলো।

ক. দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হলে মার্বেলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. দুইটি ছক্কায় প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি ১০ অপেক্ষা বড় হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর পাঁচটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ঝুড়িতে লাল মার্বেলের সংখ্যা 10টি

নীল মার্বেলের সংখ্যা 15টি

এবং সবুজ মার্বেলের সংখ্যা 12টি

$\therefore$ মোট মার্বেলের সংখ্যা = (10 + 15 + 12)টি = 37টি

দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হলে মার্বেলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{15}{37}$ **(Ans.)**

খ দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে মোট নমুনাক্ষেত্র = $6^2 = 36$

প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 10 অপেক্ষা বড় এরূপ নমুনাক্ষেত্র : {(5, 6), (6, 6), (6, 5)}

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ **(Ans.)**

গ 'ক' হতে পাই, মোট মার্বেল সংখ্যা 37টি এবং সবুজ মার্বেল সংখ্যা 12

প্রথম মার্বেলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{12}{37}$

প্রতিস্থাপন না করে দ্বিতীয় মার্বেলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{11}{36}$

অনুরূপে, প্রতিস্থাপন না করে তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম মার্বেল সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{10}{35}, \frac{9}{34}$ ও $\frac{8}{33}$।

অতএব প্রতিস্থাপন না করে পরপর পাঁচটি মার্বেল তুলে নিলে তা সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{12}{37} \times \frac{11}{36} \times \frac{10}{35} \times \frac{9}{34} \times \frac{8}{33} = \frac{8}{4403}$ **(Ans.)**

চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড : 1 2 6**

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

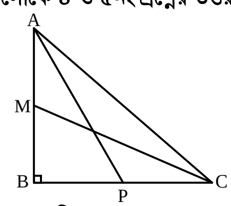
*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$ **রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ কত?**
ⓚ 30° ⓚ 60° ⓖ 120° ⓖ 150°

২. **সার্বিক সেট U এর উপসেট A, B এবং C হলে–**
i. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ii. $(A \cap B)' = A' \cap B'$
iii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৩. **যদি $F(x) = px^2 + qx + r$ এবং $p + q + r = 0$ হয়, তবে $F(x)$ এর একটি উৎপাদক কোনটি?**
ⓚ $x - p$ ⓚ $x - q$ ⓖ $x - 2$ ⓖ $x - 1$

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



চিত্রে BC ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও M. $BP = BM = 8$ সে. মি.

৪. **BC এর উপর AP ও AC এর লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি কত সে. মি.?**
ⓚ 8 ⓚ 16 ⓖ 24 ⓖ 32

৫. **$AP + CM$ = কত সে. মি.?**
ⓚ $8\sqrt{5}$ ⓚ $16\sqrt{5}$ ⓖ $24\sqrt{5}$ ⓖ $32\sqrt{5}$

৬. **একটি ত্রিভুজ গঠন করা যায় যখন–**
i. ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ এবং উচ্চতা দেওয়া থাকলে
ii. ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া থাকলে
iii. ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া থাকলে
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৭. **একই ভূমির উপর এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক ও একটি সিলিন্ডারের আয়তনের অনুপাত কোনটি?**
ⓚ 1 : 3 ⓚ 3 : 1 ⓖ 1 : 2 ⓖ 1 : 1

৮. **কোনটির জন্য $2x - 3y < 6$ সঠিক?**
ⓚ (2, 0) ⓚ (3, 0) ⓖ (5, 1) ⓖ (1, – 2)

৯. **$\log_x 4 + \log_x 16 = 6$ হলে, $\log_x 8$ এর মান কত?**
ⓚ 1 ⓚ 2 ⓖ 3 ⓖ 6

১০. **$3(1 - 2x)(3x + 2)$ এর মুখ্য সহগ কত?**
ⓚ – 18 ⓚ – 6 ⓖ 6 ⓖ 18

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১১ ও ১২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$Px^2 - 18x + 18 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

১১. **নিশ্চায়ক = 0 হলে, P এর মান কত?**
ⓚ $\frac{9}{2}$ ⓚ $\frac{2}{9}$ ⓖ $-\frac{2}{9}$ ⓖ $-\frac{9}{2}$

১২. **$P = \frac{1}{9}$ হলে, সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি কীরূপ?**
ⓚ মূলদ ও সমান ⓚ মূলদ ও অসমান
ⓖ অমূলদ ও সমান ⓖ অমূলদ ও অসমান

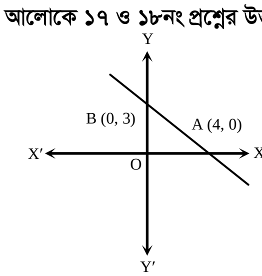
১৩. **ΔABC এ $BC = p, CA = q, AB = r$ এবং $p^2 > q^2 + r^2$ হলে–**
ⓚ $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ ⓚ $\angle A$ স্থূলকোণ
ⓖ $\angle C$ স্থূলকোণ ⓖ $\angle B$ স্থূলকোণ

১৪. **ΔDEF এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?**
ⓚ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FD}$ ⓚ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$
ⓖ $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FD} = 0$ ⓖ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = 0$

১৫. **$\tan\left(\frac{n\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে, n এর মান কত?**
ⓚ $-\frac{1}{3}$ ⓚ $-\frac{7}{3}$ ⓖ $\frac{5}{3}$ ⓖ 1

১৬. **$(1 - ax)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে, a এর মান কত?**
ⓚ $\frac{4}{3}$ ⓚ $\frac{3}{4}$ ⓖ $-\frac{3}{4}$ ⓖ $-\frac{4}{3}$

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



১৭. **ΔAOB এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?**
ⓚ 3 ⓚ 6 ⓖ 7 ⓖ 12

১৮. **নিচের কোনটি AB রেখার সমীকরণ?**
ⓚ $3x - 4y - 12 = 0$ ⓚ $3x + 4y - 12 = 0$
ⓖ $3x - 4y + 12 = 0$ ⓖ $3x + 4y + 12 = 0$

১৯. **– 3380° কোণটির অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?**
ⓚ প্রথম ⓚ দ্বিতীয় ⓖ তৃতীয় ⓖ চতুর্থ

২০. **HIGHER MATHEMATICS শব্দটির অক্ষরগুলো পৃথকভাবে একটি বাক্সে রাখা আছে। দৈবভাবে একটি বর্ণ তোলা হলো। বর্ণটি A অথবা H না হওয়ার সম্ভাবনা কত?**
ⓚ $\frac{2}{17}$ ⓚ $\frac{3}{17}$ ⓖ $\frac{5}{17}$ ⓖ $\frac{12}{17}$

২১. **একটি অনুক্রমের n-তম পদ $U_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$ অনুক্রমটির প্রথম 12টি ও প্রথম 6টি পদের সমষ্টির পার্থক্য কত?**
ⓚ 0 ⓚ 1 ⓖ 3 ⓖ 6

২২. **$f(x) = 5^{-x}$ হলে–**
i. ডোম $f = (-\infty, \infty)$ ii. রেঞ্জ $f = (0, \infty)$
iii. $f^{-1}(x) = -1.43 \log x$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

২৩. **যদি $x > y > 0$ এবং $z < 0$ হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক?**
ⓚ $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$ ⓚ $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$ ⓖ $\frac{z}{x} < \frac{y}{z}$ ⓖ $\frac{x}{z} > \frac{z}{y}$

২৪. **$\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\cos\theta$ এর মান কত?**
ⓚ $\frac{12}{13}$ ⓚ $\frac{5}{13}$ ⓖ $\frac{-12}{13}$ ⓖ $-\frac{5}{13}$

২৫. **ΔABC-এ $\sec\left(\frac{A + B}{2}\right) = ?$**
ⓚ $\text{cosec}\frac{\pi}{2}$ ⓚ $\sec\frac{\pi}{2}$ ⓖ $\sec\frac{C}{2}$ ⓖ $\text{cosec}\frac{C}{2}$

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। (i) $f(x) = \sqrt{2-5x}$

(ii) $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করে $f^{-1}(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{5}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $P = 3^{2x-2}$

$Q = 5.3^{x-2}$

$A = \frac{2-x}{2+x}$

ক. $\log_{10}\left(100+\sqrt{x^2-6x+5}\right) = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P - Q = 66$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x) = \ln A$ হলে, $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

৩। (i) $C = (1-x)^6$, $D = (1+x)^7$

(ii) $(x-1)^{-1} + (x-1)^{-2} + (x-1)^{-3} + \ldots \ldots$

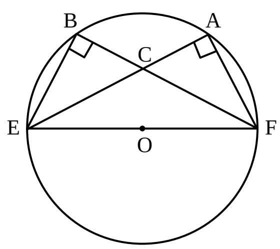
ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $(1-2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (ii) নং ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. CD এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



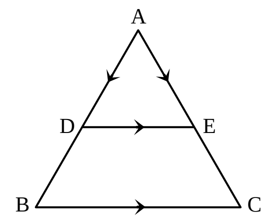
চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র।

ক. একটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $AD \perp EF$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AD^2 = DE.DF$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $EF^2 = AE.CE + BF.CF$. ৪

৫।



চিত্রে DE || BC এবং D, AB এর মধ্যবিন্দু।

ক. 9 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AC এর মধ্যবিন্দু E. ৪

গ. BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || DE || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$. ৪

৬। (i) A(6, 7), B(– 2, 3), C(0, – 1) এবং D(8, 3) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

(ii) $3x - y + 4 = 0$ এবং $4x + y - 11 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং এ প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। (i) $a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$

(ii) ঢাকা ও রাজশাহী পৃথিবীর কেন্দ্রে $3°2'3''$ কোণ উৎপন্ন করে।

ক. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হলে, ঢাকা ও রাজশাহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৮। (i) একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা চারবার নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) একটি নিরপেক্ষ ছক্কা দুইবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. নিরপেক্ষ ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হলে, জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. ছক্কা নিক্ষেপে প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির গুণফল জোড় হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. (i) হতে Probability tree তৈরি করে বড়জোড় 3T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	(গ)	২	(খ)	৩	(ঘ)	৪	(গ)	৫	(খ)	৬	(ঘ)	৭	(ক)	৮	(ক)	৯	(গ)	১০	(ক)	১১	(ক)	১২	(ঘ)	১৩	(খ)
	১৪	(ঘ)	১৫	(ঘ)	১৬	(ঘ)	১৭	(খ)	১৮	(খ)	১৯	(গ)	২০	(ঘ)	২১	(গ)	২২	(ক)	২৩	(ক)	২৪	(গ)	২৫	(ঘ)		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ (i) $f(x) = \sqrt{2-5x}$
(ii) $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করে $f^{-1}(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{5}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2-5x}$

$f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$2 - 5x \geq 0$ বা, $x \leq \frac{2}{5}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = \left\{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x \leq \frac{2}{5}\right\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2-5x}$

ধরি, $y = f(x) = \sqrt{2-5x}$

বা, $y = \sqrt{2-5x}$

বা, $y^2 = 2 - 5x$

বা, $5x = 2 - y^2$

বা, $x = \frac{2-y^2}{5}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{2-y^2}{5}$ [$\because$ $y = f(x)$ হলে $x = f^{-1}(y)$ হবে]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{5}$ **(Ans.)**

$\therefore f^{-1}(-2) = \frac{2-(-2)^2}{5} = \frac{2-4}{5} = -\frac{2}{5}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$= x(x2 - x - 2)$

$= x(x^2 - 2x + x - 2)$

$= x\{x(x-2) + 1(x-2)\}$

$= x(x-2)(x+1)$

$\therefore \frac{5}{g(x)} = \frac{5}{x(x-2)(x+1)}$

ধরি, $\frac{5}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$ ... ... (i)

উভয়পক্ষে $x(x-2)(x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$ ... ... (ii)

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে, $5 = B.2(2+1)$

বা, $5 = 6B$ $\therefore B = \frac{5}{6}$

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $5 = A(0-2)(0+1) + 0 + 0$

বা, $5 = -2A$ $\therefore A = -\frac{5}{2}$

আবার, (ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে, $5 = 0 + 0 + C.(-1)(-1-2)$

বা, $5 = 3C$ $\therefore C = \frac{5}{3}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$$\frac{5}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{-\frac{5}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{6}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1}$$

$\equiv \frac{5}{6(x-2)} - \frac{5}{2x} + \frac{5}{3(x+1)}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $P = 3^{2x-2}$; $Q = 5.3^{x-2}$; $A = \frac{2-x}{2+x}$

ক. $\log_{10}\left(100 + \sqrt{x^2 - 6x + 5}\right) = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P - Q = 66$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x) = \ln A$ হলে, $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $\log_{10}\left(100 + \sqrt{x^2 - 6x + 5}\right) = 2$

বা, $100 + \sqrt{x^2 - 6x + 5} = 10^2$

বা, $100 + \sqrt{x^2 - 6x + 5} = 100$

বা, $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = 0$

বা, $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

বা, $x(x-5) - 1(x-5) = 0$

বা, $(x-5)(x-1) = 0$

$\therefore x = 5, 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = 3^{2x-2}$, $Q = 5.3^{x-2}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $P - Q = 66$

বা, $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$

বা, $\frac{3^{2x}}{9} - \frac{5}{9}.3^x - 66 = 0$

বা, $3^{2x} - 5.3^x - 594 = 0$ [উভয়পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2 - 5a - 594 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 - 27a + 22a - 594 = 0$

বা, $a(a-27) + 22(a-27) = 0$

বা, $(a-27)(a+22) = 0$

এখন $a \neq -22$ কেননা $a = 3^x > 0$ সুতরাং $a + 22 \neq 0$

অতএব, $a - 27 = 0$

বা, $3^x = 27 = 3^3$

বা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 3$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \frac{2-x}{2+x}$

$\therefore f(x) = \ln A = \ln\frac{2-x}{2+x}$ $\therefore f(x) \in \mathbb{R}$ হবে যদি $\frac{2-x}{2+x} > 0$ হয়।

এখন, $\frac{2-x}{2+x} > 0$ হবে যদি (i) $2 - x > 0$ এবং $2 + x > 0$ হয়।

অথবা, (ii) $2 - x < 0$ এবং $2 + x < 0$ হয়।

(ii) নং এর ক্ষেত্রে $x > 2$ এবং $x < -2 = \{x : x > 2\} \cap \{x : x < -2\} = \varnothing$

এখন, (i) নং এর ক্ষেত্রে, $2 > x$ এবং $x > -2$

বা, $x < 2$ এবং $x > -2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$

$= \{-\infty, 2) \cap (-2, \infty)$

$= (-2, 2)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ (i) $C = (1-x)^6$, $D = (1+x)^7$
(ii) $(x-1)^{-1} + (x-1)^{-2} + (x-1)^{-3} + \ldots \ldots$

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $(1-2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (ii) নং ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. CD এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$(1 - 2x)^5 = 1 + 5(-2x) + 10(-2x)^2 + 10(-2x)^3 + 5(-2x)^4 + (-2x)^5$
$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপকের প্রদত্ত ধারা : $(x-1)^{-1} + (x-1)^{-2} + (x-1)^{-3} + \dots \dots \dots$

$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \dots \dots \dots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{x-1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(x-1)^2} \div \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{x-1}\right| < 1$

বা, $\frac{1}{|x-1|} < 1$ বা, $|x-1| > 1$ হয়।

এখন, $(x-1)$ অঋণাত্মক হলে, $x - 1 > 1 \therefore x > 2$

$(x-1)$ ঋণাত্মক হলে, $-(x-1) > 1$ বা, $x - 1 < -1 \therefore x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < 0$ অথবা $x > 2$ **(Ans.)**

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x-1}}$

$= \dfrac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-1-1}{x-1}} = \frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{x-2}$

$= \frac{1}{x-2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $C = (1-x)^6$ এবং $D = (1+x)^7$

$CD = (1-x)^6(1+x)^7 = (1+x)\{(1+x)(1-x)\}^6$

$= (1+x)(1-x^2)^6 = (1+x)\left(1 - \binom{6}{1}x^2 + \binom{6}{2}x^4 - \dots \dots \dots\right)$

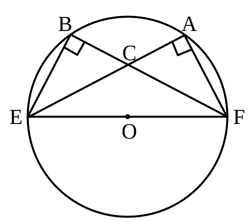
$= (1+x)(1 - 6x^2 + 15x^4 - \dots \dots \dots)$

$= (1 - 6x^2 + 15x^4 - \dots \dots) + (x - 6x^3 + 15x^5 - \dots \dots)$

$= 1 + x - 6x^2 - 6x^3 + 15x^4 + 15x^5 - \dots \dots$

$\therefore$ CD এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ = 15 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৪



চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র।

ক. একটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $AD \perp EF$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AD^2 = DE.DF$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $EF^2 = AE.CE + BF.CF$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

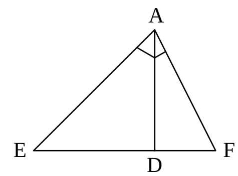
ক সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য 3 সেমি, 4 সেমি ও 5 সেমি।

এখন, অতিভুজের দৈর্ঘ্য c হলে, $2(3^2 + 4^2 + 5^2) = 3c^2$

বা, $\frac{2}{3}(9 + 16 + 25) = c^2$ বা, $c^2 = \frac{100}{3}$

$\therefore c = 5.774$ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ চিত্রানুযায়ী, ΔAEF এর $\angle A$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = 90° বলে ΔAEF সমকোণী ত্রিভুজ এবং $AD \perp EF$



প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = DE.DF$.

প্রমাণ : $\angle FAE = 90°$

$\therefore \angle EAD + \angle DAF = 90°$ ... ... (i)

আবার, $AD \perp EF$ বলে $\angle EDA = \angle ADF = 90°$

ΔEAD এ $\angle EDA + \angle EAD + \angle AED = 180°$

বা, $90° + \angle EAD + \angle AED = 180°$

$\therefore \angle EAD + \angle AED = 90°$ ... ... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং হতে পাই, $\angle EAD + \angle DAF = \angle EAD + \angle AED$

$\therefore \angle DAF = \angle AED$

এখন, ΔEAD এবং ΔADF এ $\angle EDA = \angle ADF$, $\angle AED = \angle DAF$

অবশিষ্ট $\angle EAD$ = অবশিষ্ট $\angle DFA$

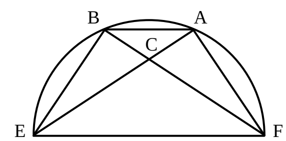
$\therefore \Delta EAD$ এবং ΔADF সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{DE}{AD}$

অর্থাৎ, $\frac{AD}{DF} = \frac{DE}{AD}$

$\therefore AD^2 = DE.DF$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, EF ব্যাসের ওপর EFAB একটি অর্ধবৃত্ত। EA ও FB জ্যাদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $EF^2 = AE.CE + BF.CF$।



অঙ্কন : A, B যোগ করি।

প্রমাণ : ΔACB ও ΔECF-এ

$\angle CBA = \angle CEF$ [একই চাপ AF-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle BCA = \angle ECF$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

অবশিষ্ট $\angle CAB$ = অবশিষ্ট $\angle CFE$

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CF}{AC}$ বা, $CE.AC = CF.BC$.

বা, $CE.AC + CE^2 = CF.BC + CE^2$ [উভয়পক্ষে CE^2 যোগ করে]

বা, $CE(AC + CE) = CF.BC + BC^2 + BE^2$

[EF ব্যাস বলে $\angle EBC = \angle EBF = 90°$; $\therefore CE^2 = BE^2 + BC^2$]

বা, $CE.AE = BC(CF + BC) + BE^2$

বা, $CE.AE = BC.BF + EF^2 - BF^2$

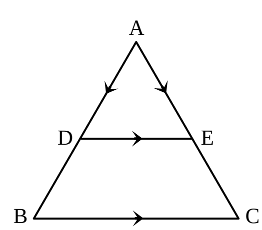
[$\angle EBF = 90°$ বলে ΔEFB-এ $EF^2 = BE^2 + BF^2$, $\therefore CE^2 = BE^2 + BC^2$]

বা, $EC.AE = EF^2 - BF(BF - BC)$

বা, $CE.AE = EF^2 - BF.CF$

$\therefore EF^2 = AE.CE + BF.CF$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫



চিত্রে DE || BC এবং D, AB এর মধ্যবিন্দু।

ক. 9 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AC এর মধ্যবিন্দু E. ৪

গ. BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || DE || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$. ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

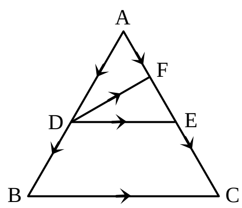
ক দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাস = 9 সেমি

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{9}{2} = 4.5$ সেমি

$\therefore$ পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2 = 4\pi.(4.5)^2$ বর্গ সেমি

$= 254.5$ বর্গ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ, DE || BC। প্রমাণ করতে হবে যে, AC এর মধ্যবিন্দু E।



মনে করি, E নয় বরং F, AC এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ D, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because$ F, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ [$\because \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$]

$= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{AF}$ এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

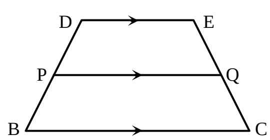
$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$]

অর্থাৎ, DF || BC. কিন্তু DE || BC [দেওয়া আছে]

তাহলে DE ও DF রেখাদ্বয় উভয়েই D বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ, DE ও DF) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore$ E ও F একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ, E, AC এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, BDEC ট্রাপিজিয়ামের BD ও CE বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং DE ও BC বাহুদ্বয় সমান্তরাল। P ও Q যথাক্রমে BD ও CE এর মধ্যবিন্দু। P, Q যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, DE || PQ || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে C, B, D, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{c}, \underline{b}, \underline{d}, \underline{e}$।

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}, \overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [$\because$ P, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$ [$\because$ Q, CE এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e} - \underline{d} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right)$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ, BC ও DE এর) সমান্তরাল হবে।

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right|$

$\therefore$ PQ || DE || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ (i) A(6, 7), B(– 2, 3), C(0, – 1) এবং D(8, 3) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

(ii) $3x - y + 4 = 0$ এবং $4x + y - 11 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং এ প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(6, 7) ও C(0, – 1) বিন্দুগামী AC রেখার সমীকরণ, $\frac{x - 6}{6 - 0} = \frac{y - 7}{7 + 1}$

বা, $\frac{x - 6}{6} = \frac{y - 7}{8}$

বা, $\frac{x - 6}{3} = \frac{y - 7}{4}$

বা, $4x - 24 = 3y - 21$

$\therefore 4x - 3y - 3 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(6, 7), B(– 2, 3), C(0, – 1) এবং D(8, 3)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6 + 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2 - 0)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0 - 8)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8 - 6)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ একক

এখন, AB = CD এবং BC = AD বলে চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলোর সমান। তাই চতুর্ভুজটি আয়ত কিংবা সামান্তরিক হবে।

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6 - 0)^2 + (7 + 1)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8 + 2)^2 + (3 - 3)^2} = 10$ একক

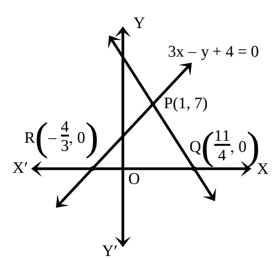
অর্থাৎ, AC কর্ণ = BD কর্ণ

$\therefore$ চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান। তাই, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $3x - y + 4 = 0$ ... ... (i)

বা, $3x - y = -4 \quad \therefore \frac{x}{\left(-\frac{4}{3}\right)} + \frac{y}{4} = 1$

অর্থাৎ, এটি x অক্ষকে $R\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে (0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।



আবার, $4x + y - 11 = 0$ ... ... (ii)

বা, $4x + y = 11 \quad \therefore \frac{x}{\frac{11}{4}} + \frac{y}{11} = 1$

অর্থাৎ, এটি x অক্ষকে $Q\left(\frac{11}{4}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে (0, 11) বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) ও (ii) নং হতে আড়গুণন পদ্ধতিতে, $\frac{x}{11 - 4} = \frac{y}{16 + 33} = \frac{1}{3 + 4}$

$\therefore \frac{x}{7} = \frac{y}{49} = \frac{1}{7}$

১ম ও ৩য় পক্ষ হতে পাই, $\frac{x}{7} = \frac{1}{7} \therefore x = 1$

২য় ও ৩য় পক্ষ হতে পাই, $\frac{y}{49} = \frac{1}{7} \therefore y = 7$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু P(1, 7)

এখন, সরলরেখাদ্বয় x অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{11}{4} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক $= \frac{1}{2}\left(\frac{77}{4} + \frac{28}{3}\right)$ বর্গএকক

$= \frac{343}{24}$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ (i) $a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$

(ii) ঢাকা ও রাজশাহী পৃথিবীর কেন্দ্রে $3°2'3''$ কোণ উৎপন্ন করে।

ক. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হলে, ঢাকা ও রাজশাহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}$

$= 1 + 1 = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

ঢাকা ও রাজশাহীর ক্ষেত্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 3°2'3''$

$= 3° + \left(\frac{2}{60}\right)° + \left(\frac{3}{60 \times 60}\right)° = \left(\frac{3641}{1200}\right)° = \left(\frac{3641}{1200} \times \frac{\pi}{180}\right)^c$

$= 0.053^c$ (প্রায়)

$\therefore$ ঢাকা ও রাজশাহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $s = r\theta = (6440 \times 0.053)$ কি.মি.

$= 341.32$ কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ বা, $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয়, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ $= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ θ এর সম্ভাব্য সকল মান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা চারবার নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) একটি নিরপেক্ষ ছক্কা দুইবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. নিরপেক্ষ ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হলে, জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. ছক্কা নিক্ষেপে প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির গুণফল জোড় হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. (i) হতে Probability tree তৈরি করে বড়জোড় 3T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হলো :

1, 2, 3, 4, 5, 6 $\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 6টি

জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা হওয়ার ঘটনা = {2, 3, 4, 6}

$\therefore$ মোট অনুকূল ফলাফল = 4টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

খ দুটি ছক্কা নিক্ষেপে প্রাপ্ত সম্ভাব্য ফলাফলের নমুনাক্ষেত্র = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 36টি।

প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির গুণফল জোড়া হবে যদি সংখ্যাদ্বয় জোড় ও জোড় এবং জোড় ও বিজোড় হয়।

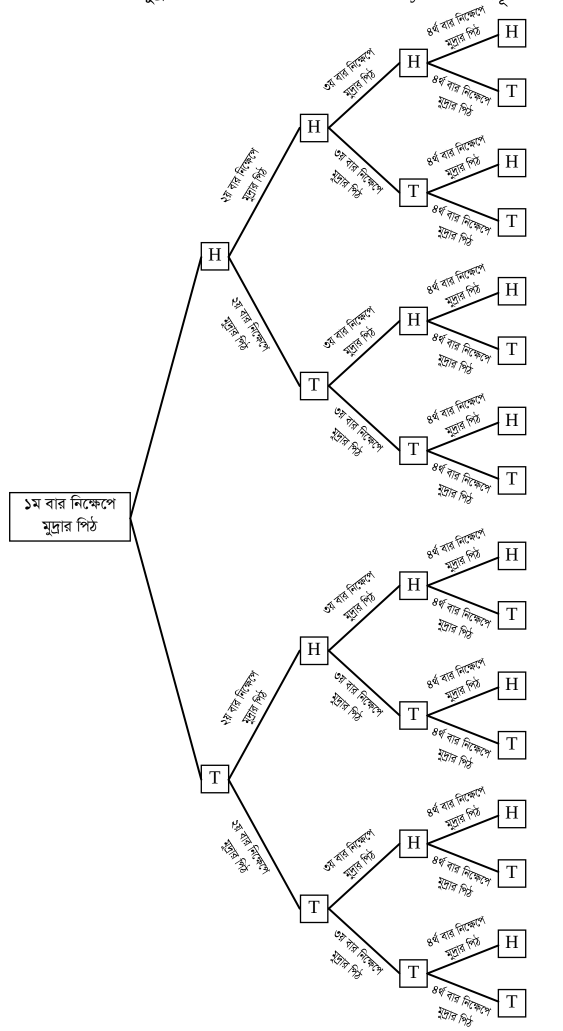
$\therefore$ অনুকূল ঘটনা = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore$ মোট অনুকূল ফলাফল = 27টি

$\therefore$ ছক্কা নিক্ষেপে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল জোড় হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

গ একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা চারবার নিক্ষেপের Probability tree নিম্নরূপ :



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্র, S = {HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

$\therefore$ মোট সম্ভাব্য ঘটনা, $n(S) = 16$

চারটিই T আসার ঘটনা = {TTTT}

$\therefore$ চারটিই T আসার ফলাফল = 1টি

$\therefore$ বড়জোড় 3T আসার ফলাফল (16 – 1)টি = 15টি

$\therefore$ বড়জোড় 3T আসার সম্ভাবনা $= \frac{15}{16}$ **(Ans.)**

সিলেট বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $f(x) = \frac{3x}{3-x}$ ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?
ⓚ $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$ ⓚ $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$
ⓖ $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$ ⓖ $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

২. একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি জোড় এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{5}{6}$

৩. $x^3 + 2x^2 + 3x + 2m$ এর একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে m এর মান কত?
ক -2 খ -3 গ 3 ঘ 6

৪. ΔDEF এ, $EF^2 > DE^2 + DF^2$ হলে–
i. $\angle D$ স্থূলকোণ ii. $\angle E$ সমকোণ
iii. $\angle F$ সূক্ষ্মকোণ
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৫. $5x - 3 - x^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কীরূপ হবে?
ক অবাস্তব খ বাস্তব ও সমান
গ বাস্তব ও মূলদ ঘ বাস্তব ও অমূলদ

৬. একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 54 বর্গ সে. মি.। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?
ক 4.24 সে. মি. খ 5.20 সে. মি.
গ 12.73 সে. মি. ঘ 15.59 সে. মি.

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ৭ ও ৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
একটি গাড়ি 2 ঘণ্টায় যায় x কি. মি. এবং 3 ঘণ্টায় যায় $(x + 60)$ কি. মি.। গাড়িটির গড় গতিবেগ অনূর্ধ্ব 50 কি. মি.।

৭. সমস্যাটির অসমতা রূপ নিচের কোনটি?
ক $\frac{x+x+60}{2} \leq 50$ খ $\frac{2x+3x+60}{5} \leq 50$
গ $\frac{x+x+60}{5} \geq 50$ ঘ $\frac{x+x+60}{5} \leq 50$

৮. সমস্যাটিতে x এর সম্ভাব্য মান নিচের কোনটি?
ক $0 < x \leq 95$ খ $0 < x < 95$
গ $0 < x \leq 155$ ঘ $0 < x < 155$

৯. একটি ত্রিভুজাকার প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13 সে. মি., 12 সে. মি. ও 5 সে. মি. এবং উচ্চতা 15 সে. মি.। প্রিজমটির আয়তন কত?
ক 30 ঘন সে. মি. খ 60 ঘন সে. মি.
গ 450 ঘন সে. মি. ঘ 510 ঘন সে. মি.

১০. $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + ...$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
ক $\frac{5}{2}$ খ $\frac{3}{2}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{1}{6}$

১১. কোনো ত্রিভুজের উচ্চতা h, ভূমির উপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হলে–
i. ভূমির উপর লম্ব অঙ্কন করতে হবে
ii. $\angle x$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে
iii. ভূমি থেকে d এর সমান অংশ কাটতে হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i খ ii গ i ও ii ঘ i, ii ও iii

১২. $\cos 5\theta = \sin 5\theta$ হলে, θ এর মান কত?
ক $\frac{5\pi}{4}$ খ $\frac{\pi}{2}$ গ $\frac{\pi}{5}$ ঘ $\frac{\pi}{20}$

১৩. $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$ এবং $ab = 1$ হলে, $(m + n)$ এর মান কত?
ক 0 খ 1 গ 2 ঘ 4

১৪. $\frac{-2x}{(5-x)(3-x)} \equiv \frac{5}{5-x} + \frac{A}{3-x}$ হলে, A এর মান কত?
ক -5 খ -3 গ 3 ঘ 5

১৫. $y = 3^{x-1}$ ফাংশনের–
i. ডোমেন $= (-\infty, \infty)$ ii. রেঞ্জ $= (0, \infty)$
iii. বিপরীত ফাংশন $\log_3(x + 3)$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৬. $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ কত?
ক $\frac{7}{4}$ খ $\frac{21}{4}$ গ $\frac{21}{16}$ ঘ $\frac{35}{64}$

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং রেখাটি $(-2, 0)$ বিন্দুগামী।

১৭. রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?
ক 30° খ 60° গ 120° ঘ 150°

১৮. সরলরেখাটির সমীকরণ নিচের কোনটি?
ক $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ খ $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$
গ $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ ঘ $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$

১৯. দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 170 এবং সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 77 হলে, ঐ সংখ্যাদ্বয়ের বর্গের অন্তর কত?
ক 18 খ 51 গ 72 ঘ 85

২০. $\overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{RS}$
i. $PQ \parallel RS$
ii. $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{RS}$ সমমুখী হবে যখন $m > 0$
iii. $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{RS}$ বিপরীতমুখী হবে যখন $m < 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২১. একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে একবার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনার নমুনা বিন্দুর সংখ্যা কত হবে?
ক 12 খ 24 গ 48 ঘ 72

২২. সকাল 9 : 45 টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ কত?
ক 0 রেডিয়ান খ $\frac{\pi}{12}$ রেডিয়ান
গ $\frac{\pi}{8}$ রেডিয়ান ঘ $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান

২৩. সার্বিক সেট $U = \{3, 4, 5, 6\}$ হলে, $S = \{x : x + 2 \leq 7\}$ এর প্রকৃত উপসেট কোনটি?
ক $\{3, 6\}$ খ $\{3, 5\}$ গ $\{3, 4, 5\}$ ঘ $\{3, 5, 6\}$

২৪. 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি কত?
ক 37.5 বর্গ সে. মি. খ 50 বর্গ সে. মি.
গ 75 বর্গ সে. মি. ঘ 112.5 বর্গ সে. মি.

২৫. 180π মিটার পথ যেতে একটি চাকা 30 বার ঘোরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত?
ক 2 মিটার খ 3 মিটার গ 4 মিটার ঘ 6 মিটার

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

সিলেট বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ এবং $Q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. a এর কোন মানের জন্য $x + 2$, $x^2 + 6x - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে? ২

খ. $Q = 0$ হলে, দেখাও যে, $x + y + z = 0$ অথবা $x = y = z$. ৪

গ. $\frac{x^3}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। (i) $\frac{1}{(3x-4)} + \frac{1}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(3x-4)^3} + ...$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

(ii) $\left(x - \frac{k}{x^2}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $2.0\dot{5}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 252 হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩। $P = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}$ এবং $Q = \frac{\log_k(7 + x)}{\log_k x}$.

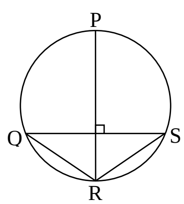
ক. $(27)^x = (81)^y$ হলে $\frac{x}{y}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $Q = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2x - 1 = \sqrt{29}$. ৪

গ. $P = x - 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 6x^2 - 3x - 8 = 0$. ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



ক. $A(5, 2)$, $B(-5, t)$ এবং $C(1, 0)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PR.QS = PQ.SR + QR.SP$. ৪

গ. $ET \perp QR$ হলে, প্রমাণ কর যে, $ET^2 = QT.RT$. ৪

৫। লোহার তৈরি একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 8 সেমি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সেমি।

ক. 4 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. বেলনটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. বেলনে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে 6 সেমি. ব্যাসের কতগুলো নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে? ৪

৬। A(6, – 2), B(6, 5), C(– 4, 5) এবং D(– 4, – 2) একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

ক. C বিন্দুগামী এবং 2 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজটির যে অংশ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $\sec\theta - \tan\theta = p$ এবং $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = Q$.

ক. $15'7''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P = x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$. ৪

গ. $Q = 3$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (i) একটি ঝুড়িতে 10টি কালো, 7টি লাল এবং 5টি সাদা বল আছে।

(ii) একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা এবং মৌলিক সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. মুদ্রাটি নিক্ষেপের Probability Tree অংকন করে বড় জোড় 2T পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি বল তুলে নেয়া হলে, সবগুলো বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	গ	২	ক	৩	গ	৪	খ	৫	ঘ	৬	খ	৭	ঘ	৮	ক	৯	গ	১০	ঘ	১১	ক	১২	ঘ	১৩	ক
	১৪	খ	১৫	ক	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	গ	২০	ঘ	২১	খ	২২	গ	২৩	খ	২৪	ক	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ এবং $Q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. a এর কোন মানের জন্য $x + 2$, $x^2 + 6x - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে? ২

খ. $Q = 0$ হলে, দেখাও যে, $x + y + z = 0$ অথবা $x = y = z$. ৪

গ. $\frac{x^3}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $g(x) = x^2 + 6x - a$

$(x + 2)$, $g(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি $g(-2) = 0$ হয়।

এখন, $g(-2) = 0$

বা, $(-2)^2 + 6(-2) - a = 0$

বা, $4 - 12 = a$

$\therefore a = -8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ এবং $Q = 0$

অর্থাৎ, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $(x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = 0$

বা, $(x + y + z)^3 - 3(x + y).z.(x + y + z) - 3xy(x + y + z) = 0$

বা, $(x + y + z)\{(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy\} = 0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 3zx - 3yz - 3xy) = 0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $\frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz) = 0$

বা, $\frac{1}{2}(x + y + z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2) = 0$

$\therefore (x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$

হয়, $x + y + z = 0$

অথবা, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$

আমরা জানি, কতগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে, রাশিগুলোর মানও পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

$x - y = 0$	$y - z = 0$	$z - x = 0$
$\therefore x = y$ ... ... (i)	$\therefore y = z$ ... ... (ii)	$\therefore z = x$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে পাই, $x = y = z$

সুতরাং, $x + y + z = 0$ অথবা, $x = y = z$ **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 4x - 3x - 6$

$= x^2(x + 2) + 2x(x + 2) - 3(x + 2)$

$= (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$

$= (x + 2)(x^2 + 3x - x - 3)$

$= (x + 2)(x + 3)(x - 1)$

সুতরাং, $\frac{x^3}{P(x)} = \frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)(x - 1)}$

ধরি, $\frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)(x - 1)} \equiv 1 + \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 2)(x + 3)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (x + 2)(x + 3)(x - 1) + A(x + 3)(x - 1) + B(x + 2)(x - 1) + C(x + 2)(x + 3)$ ... ... (ii)

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$(-2)^3 = 0 + A(-2 + 3)(-2 - 1) + 0 + 0$

বা, $-8 = -3A \therefore A = \frac{8}{3}$

(ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই, $(-3)^3 = B(-3 + 2)(-3 - 1)$

বা, $-27 = 4B \therefore B = \frac{-27}{4}$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $(1)^3 = C(1 + 2)(1 + 3)$

বা, $1 = 12C \therefore C = \frac{1}{12}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)(x - 1)} = 1 + \frac{8}{3(x + 2)} - \frac{27}{4(x + 3)} + \frac{1}{12(x - 1)}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ *(i)* $\frac{1}{(3x - 4)} + \frac{1}{(3x - 4)^2} + \frac{1}{(3x - 4)^3} + ...$ ... একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

(ii) $\left(x - \frac{k}{x^2}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $2.0\dot{5}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. *(ii)* এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 252 হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সংখ্যা $a = 2.0\dot{5} = 2.0555$ ... ...

$= 2 + (0.05 + 0.005 + 0.0005 + ...)$

এখানে দশমিক ভগ্নাংশের সমষ্টি নিয়ে একটি অসীম গুণোত্তর ধারা সৃষ্টি হয়েছে যার প্রথম পদ, $b = 0.05$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.005}{0.05} = 0.1$

$\therefore$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি $= \frac{b}{1 - r} = \frac{0.05}{1 - 0.1}$

$= \frac{0.05}{0.9} = \frac{1}{18}$

$\therefore a = 2 + (0.05 + 0.005 + 0.0005 + ...)$

$= 2 + \frac{1}{18} = \frac{37}{18}$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারার ১ম পদ, $a = \frac{1}{3x - 4}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x - 4)^2} \div \frac{1}{3x - 4} = \frac{1}{3x - 4}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x - 4}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{3x - 4} < 1 \quad \therefore \frac{1}{3x - 4} < 1$

বা, $3x - 4 > 1$

বা, $3x - 4 + 4 > 1 + 4$

বা, $3x > 5 \quad \therefore x > \frac{5}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x - 4} > -1$

বা, $3x - 4 < -1$

বা, $3x < 4 - 1$

বা, $3x < 3 \quad \therefore x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < 1$ অথবা, $x > \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{3x-4}}{1 - \frac{1}{3x-4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3x-4}}{\frac{3x-4-1}{3x-4}}$$

$$= \frac{1}{3x-4} \times \frac{3x-4}{3x-5}$$

$$= \frac{1}{3x-5}$$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি = $\left(x - \frac{k}{x^2}\right)^8$

ধরি, x^2 এর সহগ $(r + 1)$ তম পদে অবস্থিত।

এখন, $(r + 1)$ তম পদ = $^nC_r a^{n-r}.b^r$

$$= {}^8C_r x^{8-r}.\left(-\frac{k}{x^2}\right)^r = {}^8C_r x^{8-r}.x^{-2r}.(-k)^r$$

$$= {}^8C_r x^{8-3r}.(-k)^r$$

শর্তমতে, $x^{8-3r} = x^2$

বা, $8 - 3r = 2$

বা, $3r = 6$ $\therefore r = 2$

আবার, দেওয়া আছে, $(r + 1)$ তম পদের সহগ = 252

$\therefore {}^8C_r(-k)^r = 252$

বা, ${}^8C_2(-k)^2 = 252$

বা, $28k^2 = 252$

বা, $k^2 = \frac{252}{28} = 9$

$\therefore k = \pm 3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ $P = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}$ এবং $Q = \frac{\log_k(7+x)}{\log_k x}$.

ক. $(27)^x = (81)^y$ হলে $\frac{x}{y}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $Q = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2x - 1 = \sqrt{29}$. ৪

গ. $P = x - 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 6x^2 - 3x - 8 = 0$. ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(27)^x = (81)^y$

বা, $3^{3x} = 3^{4y}$

বা, $3x = 4y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = 2$

বা, $\frac{\log_k(7+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(7 + x) = 2\log_k x = \log_k x^2$

বা, $x + 7 = x^2$ [$\log_k$ অপসারণ করে]

বা, $x^2 - x - 7 = 0$

$$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-7)}}{2.1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম অসংজ্ঞায়িত। তাই $x \neq \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

অতএব, $x = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

বা, $2x = 1 + \sqrt{29}$

$\therefore 2x - 1 = \sqrt{29}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $P = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}$

বা, $x - 2 = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}$

বা, $(x-2)^3 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.5^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{1}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $x^3 - 3x^2.2 + 3.x.2^2 - 2^3 = 5^2 + 5 + 3.5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}.(x-2)$

$\left[\because P = x - 2 = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right]$

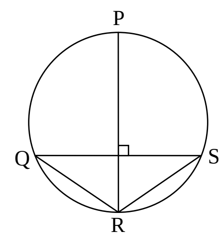
বা, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 25 + 5 + 3.5^1(x - 2)$

বা, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 30 + 15x - 30$

বা, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 15x = 0$

$\therefore x^3 - 6x^2 - 3x - 8 = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৪



ক. $A(5, 2)$, $B(-5, t)$ এবং $C(1, 0)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PR.QS = PQ.SR + QR.SP$. ৪

গ. $ET \perp QR$ হলে, প্রমাণ কর যে, $ET^2 = QT.RT$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(5, 2), B(– 5, t) ও C(1, 0) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

তাহলে, AB রেখার ঢাল AC রেখার ঢালের সমান হবে।

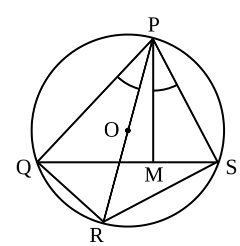
$\therefore \frac{t-2}{-5-5} = \frac{0-2}{1-5}$ বা, $\frac{t-2}{-10} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

বা, $t - 2 = -\frac{10}{2} = -5$

বা, $t = -5 + 2 = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $t = -3$ **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন :** মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS.



অঙ্কন : ∠QPR কে ∠SPR থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে ∠QPR-এর সমান করে ∠SPM আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে ∠QPR = ∠SPM

উভয়পক্ষে ∠RPM যোগ করে পাই,

∠QPR + ∠RPM = ∠SPM + ∠RPM

অর্থাৎ, ∠QPM = ∠RPS

এখন ΔPQM ও ΔPRS এর মধ্যে ∠QPM = ∠RPS

∠PQM = ∠PRS [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

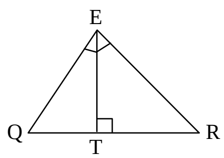
এবং অবশিষ্ট ∠PMQ = অবশিষ্ট ∠PSR

∴ ΔPQM ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ, PR.QM = PQ.RS ... . (i)
আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে
$\angle QPR = \angle SPM$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle PRQ = PSM$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PMS$
$\therefore \Delta PQR$ ও ΔPMS সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$
অর্থাৎ, PR.MS = QR.PS ... ... (ii)
এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,
PR.QM + PR.MS = PQ.RS + QR.PS
বা, PR(QM + MS) = PQ.RS + QR.PS
বা, PR.QS = PQ.RS + QR.PS [যেহেতু QM + MS = QS]
$\therefore$ PR.QS = PQ.RS + QR.PS **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে,
ΔQRE এর $\angle E = 90°$
TE, RQ এর উপর লম্ব।
প্রমাণ করতে হবে যে, $ET^2 = RT.QT$



প্রমাণ : ΔQRE-এ $\angle E = 90°$
$\therefore \angle RET + \angle TEQ = 90°$ ... ... (i)
আবার, ΔRTE-এ $\angle RTE = 90°$
$\therefore \angle ERT + \angle RET = 90°$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং হতে পাই,
$\angle RET + \angle TEQ = \angle ERT + \angle RET$
$\therefore \angle TEQ = \angle ERT$
এখন, ΔRTE ও ΔQTE-এ $\angle RTE = \angle QTE = 90°$
এবং $\angle ERT = \angle TEQ$
এবং অবশিষ্ট $\angle RET$ = অবশিষ্ট $\angle EQT$
সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হওয়ায় $\frac{RT}{ET} = \frac{ET}{QT}$
অর্থাৎ, $ET^2 = RT.QT$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ লোহার তৈরি একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 8 সেমি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সেমি।

ক. 4 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২
খ. বেলনটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪
গ. বেলনে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে 6 সেমি. ব্যাসের কতগুলো নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে? ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত গোলকের ব্যাস = 4 সেমি
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{4}{2} = 2$ সেমি
$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$
$= 4 \times 3.1416 \times 2^2$ বর্গ সেমি
$= 50.2656$ বর্গ সেমি **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,
বেলনের উচ্চতা, h = 8 সেমি
এবং ভূমির ব্যাসার্ধ, r = 6 সেমি
$\therefore$ বেলনের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$ বর্গএকক
$= 2 \times 3.1416 \times 6 \times (6 + 8)$ বর্গ সেমি
$= 527.7888$ বর্গ সেমি
ধরি, ঘনকের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = a সেমি
তাহলে ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গসেমি
শর্তমতে, $6a^2 = 527.7888$
বা, $a^2 = \frac{527.7888}{6} = 87.9648 \;\; \therefore a = 9.38$ (প্রায়)
$\therefore$ ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য 9.38 সেমি **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, বেলনের উচ্চতা h = 8 সেমি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r = 6 সেমি
প্রদত্ত লোহার তৈরি বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h = 3.1416 \times 6^2 \times 8$ ঘন সেমি
$= 904.7808$ ঘন সেমি
6 সেমি ব্যাসের বা 3 সেমি ব্যাসার্ধের নিরেট গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$
$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 3^3$
$= 113.0976$ ঘন সেমি
ধরি, বেলনে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে 6 সেমি ব্যাসের n সংখ্যক গোলক তৈরি করা যাবে।
$\therefore n \times 113.0976 = 904.7808$
বা, $n = \frac{904.7808}{113.0976} = 8$
অতএব বেলনে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে 8টি নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে। **(Ans.)**

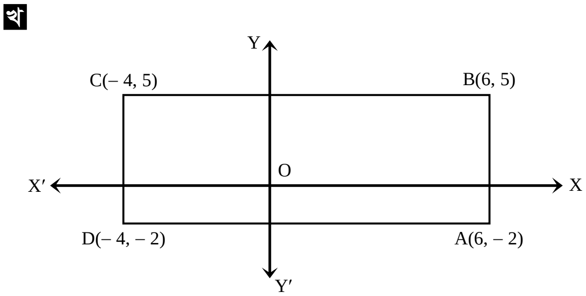
প্রশ্ন ▶ ০৬ A(6, – 2), B(6, 5), C(– 4, 5) এবং D(– 4, – 2) একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

ক. C বিন্দুগামী এবং 2 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২
খ. ABCD চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪
গ. ABCD চতুর্ভুজটির যে অংশ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

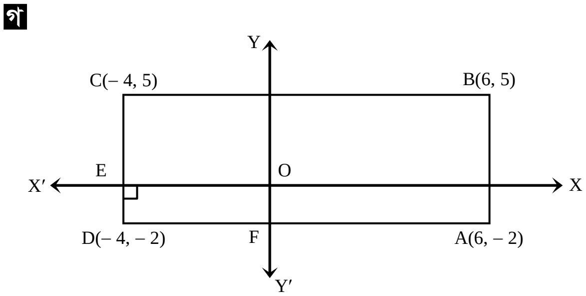
ক দেওয়া আছে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 4, 5)
আমরা জানি, m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী
রেখার সমীকরণ : $y - y_1 = m(x - x_1)$
$\therefore$ 2 ঢালবিশিষ্ট (– 4, 5) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ : $y - 5 = 2(x + 4)$
বা, $2x + 8 - y + 5 = 0$
$\therefore 2x - y + 13 = 0$ **(Ans.)**

খ



ABCD চতুর্ভুজের
বাহু AB $= \sqrt{(6 - 6)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{0 + 49} = 7$ একক
বাহু BC $= \sqrt{(6 + 4)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{100 + 0} = 10$ একক
বাহু CD $= \sqrt{(-4 + 4)^2 + (5 + 2)^2} = \sqrt{0 + 49} = 7$ একক
বাহু AD $= \sqrt{(6 + 4)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{100 + 0} = 10$ একক
কর্ণ AC $= \sqrt{(6 + 4)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{100 + 49} = \sqrt{149}$ একক
কর্ণ BD $= \sqrt{(6 + 4)^2 + (5 + 2)^2} = \sqrt{100 + 49} = \sqrt{149}$ একক
অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় AB = CD এবং BC = AD
আবার কর্ণ AC = কর্ণ BD
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ



'খ' হতে পাই, ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র অতএব চতুর্ভুজটি দ্বারা তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত OEDF ক্ষেত্রটিও একটি আয়তক্ষেত্র হবে।
এখন, CD রেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং $(-4, 5)$ বিন্দুগামী
$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ : $x = -4$
অনুরূপভাবে $D(-4, -2)$ বিন্দুগামী ও x অক্ষের সমান্তরাল AD রেখার সমীকরণ $y = -2$
এখন, $x = -4$ রেখাটি x অক্ষকে $(-4, 0)$ বিন্দুতে এবং $y = -2$ রেখাটি y অক্ষকে $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
অর্থাৎ, E ও F বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-4, 0)$ ও $(0, -2)$

$$\therefore \text{OEDF চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(8 + 8) = 8 \text{ বর্গএকক } \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ০৭ $\sec\theta - \tan\theta = p$ এবং $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = Q$.
ক. $15'7''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২
খ. $P = x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$. ৪
গ. $Q = 3$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত কোণ $= 15'7'' = \left(15\frac{7}{60}\right)^{1}$ $[\because 1' = 60'']$
$$= \left(\frac{907}{60}\right)^{1} = \left(\frac{907}{60 \times 60}\right)^{0} \quad [\because 1^\circ = 60']$$
$$= \frac{907}{60 \times 60} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান } \left[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}\right]$$
$$= 0.0044 \text{ রেডিয়ান (প্রায়) } \textbf{(Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P = x$
বা, $\sec\theta - \tan\theta = x$ বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$
বা, $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = x$ বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [বর্গ করে]
বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$ বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = x^2$
বা, $\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = x^2$ বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1}{x^2}$
বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]
বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$
বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$
$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ **(প্রমাণিত)**

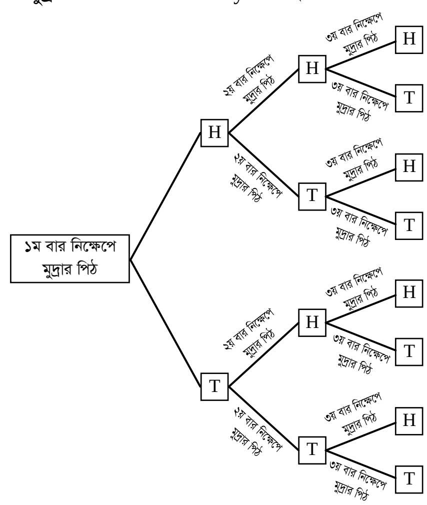
গ দেওয়া আছে, $Q = 3$
বা, $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$
বা, $2 - 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$
বা, $2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$
বা, $(\sqrt{2}\sin\theta)^2 - 2\sqrt{2}\sin\theta.1 + 1^2 = 0$
বা, $(\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0$
বা, $\sqrt{2}\sin\theta = 1$
বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
$\therefore 0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) একটি ঝুড়িতে 10টি কালো, 7টি লাল এবং 5টি সাদা বল আছে।
(ii) একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো।
ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা এবং মৌলিক সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২
খ. মুদ্রাটি নিক্ষেপের Probability Tree অংকন করে বড় জোড় 2T পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪
গ. প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি বল তুলে নেয়া হলে, সবগুলো বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা : 1, 3, 5
মৌলিক সংখ্যা : 2, 3, 5
ছক্কায় মোট সংখ্যা আছে 6টি
বিজোড় ও মৌলিক সংখ্যা আছে 2টি
$\therefore$ বিজোড় এবং মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপের Probability tree হবে :



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্র, S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH, THH, TTT}
নমুনাক্ষেত্র হতে দেখা যায়
মোট সম্ভাব্য ঘটনা = 8
বড়জোর 2টি T পাওয়ার ঘটনা = 7
$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

গ ঝুড়িতে কালো বল আছে 10টি, লাল বল আছে 7টি এবং সাদা বল আছে 5টি
মোট বল আছে = 10 + 7 + 5 = 22টি
প্রতিস্থাপন না করে,
১ম বার বল উঠালে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{22}$
২য় বার বল উঠালে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{21}$
৩য় বার বল উঠালে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{20}$
$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে তিন বারই লাল বল আসার সম্ভাবনা
$$= \frac{7}{22} \times \frac{6}{21} \times \frac{5}{20} = \frac{1}{44} \textbf{ (Ans.)}$$

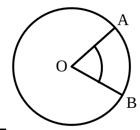
বরিশাল বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. 11 হতে 20 এর মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। নির্বাচিত সংখ্যাটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক $\frac{2}{5}$ খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{3}{10}$ ঘ $\frac{1}{5}$

২.


চিত্রে, O কেন্দ্র হলে নিচের কোনটি সঠিক?
ক $\angle AOB \propto AB$ খ $\angle AOB \propto \frac{1}{AB}$
গ $\angle AOB \propto AB^2$ ঘ $\angle AOB \propto \frac{1}{AB^2}$

□ **নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
একই সমতলে অবস্থিত তিনটি বিন্দু $P(-2, 1), Q(-1, 5)$ এবং $R(a, 3)$

৩. মূলবিন্দু ও P এর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
ক 1 একক খ $\sqrt{3}$ একক গ 2 একক ঘ $\sqrt{5}$ একক

৪. Q ও R বিন্দুর সংযোগ সরলরেখার ঢাল $\frac{1}{2}$ হলে a এর মান কত?
ক -5 খ -3 গ -2 ঘ 0

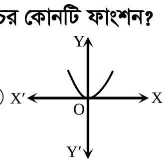
৫. $a + ab + ab^2 + ...$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি থাকলে, b এর জন্য কোনটি সঠিক?
ক $b = -1$ খ $|b| > 1$ গ $|b| < 1$ ঘ $b = 1$

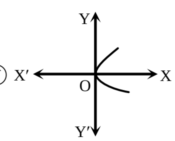
৬. 2 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা $4\sqrt{3}$ সে.মি. হলে পিজমটির আয়তন কত?
ক 144 ঘন সে.মি. খ 72 ঘন সে.মি.
গ 48 ঘন সে.মি. ঘ 36 ঘন সে.মি.

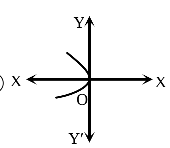
৭. $A \cap B = \phi$, $n(A) = 3$ এবং $n(A \cup B) = 10$ হলে $n(B) = ?$
ক 13 খ 10 গ 7 ঘ 3

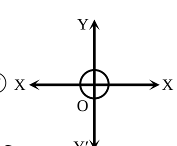
৮. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কত?
ক $-\frac{4}{3}$ খ $-\frac{3}{4}$ গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{4}{3}$

৯. নিচের কোনটি ফাংশন?

ক


খ


গ


ঘ


১০. $y = x - 5$ এবং $y = -x + 5$ এর ছেদবিন্দু–
ক (0, 0) খ (0, 5) গ (5, 0) ঘ (– 5, 5)

১১. – 580° কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?
ক প্রথম খ দ্বিতীয় গ তৃতীয় ঘ চতুর্থ

১২. $P(x, y, z) = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ হলে,
i. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক রাশি
ii. $P(x, y, z)$ প্রতিসম রাশি
iii. $P(1, -2, 1) = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৩. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং $AC = BC$ হলে $\overrightarrow{OC}$ = কত?
ক $\frac{\underline{a} - \underline{b}}{2}$ খ $\frac{\underline{b}}{2} - \underline{a}$ গ $\frac{\underline{a}}{2} - \underline{b}$ ঘ $\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$

১৪. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কোনটি?
ক 7 খ 12 গ 15 ঘ 20

১৫. $f(x) = 3^x$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?
ক $\log_3 x$ খ $\log_3 y$ গ $\log_y 3$ ঘ $\log_x 3$

১৬. 6cm ব্যাসবিশিষ্ট গোলকের আয়তন কত ঘন সে.মি.?
ক 12π খ 27π গ 36π ঘ 108π

□ **নিচের তথ্য থেকে ১৭ ও ১৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
একটি ঝুড়িতে একই ধরনের 12টি নীল, 15টি সবুজ ও 20 টি কালো বল আছে। দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হল।

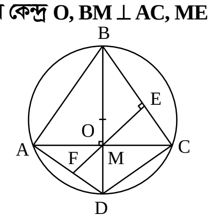
১৭. বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক $\frac{32}{47}$ খ $\frac{20}{47}$ গ $\frac{15}{47}$ ঘ $\frac{12}{47}$

১৮. বলটি সবুজ অথবা কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক $\frac{15}{47}$ খ $\frac{20}{47}$ গ $\frac{32}{47}$ ঘ $\frac{35}{47}$

১৯. $y^x = 9$, $y^2 = 3^x$ সমীকরণ জোটের একটি সমাধান কোনটি?
ক $(-3, -3)$ খ $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ গ $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ ঘ $(-2, 3)$

২০. $2y = \frac{x}{k} + 3$ এবং $5y - 10x + 8 = 0$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে k এর মান কত?
ক -1 খ $-\frac{1}{4}$ গ $\frac{1}{4}$ ঘ 1

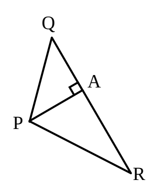
২১. $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ হলে, $\tan^2\theta$ এর মান কোনটি?
ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{7}{9}$ ঘ $\frac{7}{4}$

২২. চিত্রে, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O, $BM \perp AC$, $ME \perp BC$ এবং $AB = BC$.


i. $AC.BD = AB(CD + AD)$ ii. $AF \neq FD$
iii. $AB^2 = BD.BM$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৩. $^nc_3 = {}^nc_4$ হলে n এর মান কোনটি?
ক 6 খ 7 গ 9 ঘ 12

২৪. $4x + 3 > 19$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?
ক $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$ খ $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$
গ $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$ ঘ $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$

২৫.


চিত্র $PA \perp QR$, $AQ = 7$cm এবং $QR = 16$ cm হলে ΔPAQ ও ΔPAR এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত কত?
ক 7 : 16 খ 7 : 9 গ 9 : 7 ঘ 16 : 7

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

বরিশাল বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান :** ৫০

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। (i) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 মিটার কম। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 1000 বর্গমিটার।
(ii) $P = a^2 - 9a - 6$, $Q = a^3 + a^2 - 6a$.
ক. $3 - 4x - x^2 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২
খ. আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪
গ. $\frac{P}{Q}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $A = \left(k + \frac{x}{2}\right)^5$ এবং $B = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots\ldots$
ক. $k = 1$ হলে A কে প্যাসক্যাল ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২
খ. B এর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। ৪
গ. $A = 32 - px + qx^2 + rx^3 + \ldots\ldots\ldots$ হলে, p, q ও r এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩। $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $f(x) = \ln\frac{5+x}{5-x}$.
ক. $m^{m\sqrt{m}} = (m\sqrt{m})^m$ হলে m এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. $abc = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p^x + p^{-y} + 1} + \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1} = 1$ ৪
গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

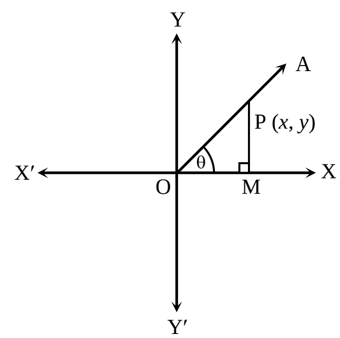
৪। ΔPQR এর QR বাহু A ও B বিন্দুতে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়েছে।
ক. প্রদত্ত ত্রিভুজে $\angle PQR = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$. ২
খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PB^2 = 2(AP^2 + AB^2)$. ৪
গ. দেখাও যে, $PQ^2 + PR^2 = PA^2 + PB^2 + 4AB^2$. ৪

৫। $PQRS$ একটি চতুর্ভুজ এবং PR ও QS দুটি কর্ণ।
ক. 6 সে.মি, 4 সে.মি. ও 3 সে. মি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিসীমা নির্ণয় কর। ২
খ. প্রদত্ত চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে প্রমাণ কর যে, $PQ.QS = PQ.SR + PS.QR$ ৪
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৬। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু $P(5, 3)$, $Q(-4, 2)$, $R(-2, -1)$ ও $S(3, k)$ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।
ক. PQ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২
খ. $PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ΔPQS এর ক্ষেত্রফলের $\frac{56}{43}$ গুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪
গ. যদি $A(x, y)$ বিন্দুটি P ও Q বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $9x + y - 7 = 0$. ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭।



ক. $20°24'35''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২
খ. $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = a$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \frac{2a}{a^2 + 1}$. ৪
গ. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। একটি ঝুড়িতে 10টি লাল, 12টি হলুদ, 8টি কালো এবং 15টি সাদা বল আছে।
ক. একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করলে উভয় ক্ষেত্রে একই ফলাফল আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২
খ. দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হলে বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা ও কালো হওয়ার সম্ভাবনার পার্থক্য নির্ণয় কর। ৪
গ. প্রতিস্থাপন না করে পরপর তিনটি বল তোলা হলে সবগুলো বল হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ক	২	ক	৩	ঘ	৪	ক	৫	গ	৬	খ	৭	গ	৮	ক	৯	ক	১০	গ	১১	খ	১২	খ	১৩	ঘ
	১৪	গ	১৫	ক	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	ঘ	১৯	গ	২০	গ	২১	খ	২২	খ	২৩	খ	২৪	ক	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▸ ০১ *(i)* একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 মিটার কম। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 1000 বর্গমিটার।

(ii) $P = a^2 - 9a - 6,\ Q = a^3 + a^2 - 6a.$

ক. $3 - 4x - x^2 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{P}{Q}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $3 - 4x - x^2 = 0$

বা, $-x^2 - 4x + 3 = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = -1,\ b = -4$ এবং $c = 3$

∴ নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(-1).3$

$= 16 + 12$

$= 28$ **(Ans.)**

খ মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ x মিটার

∴ দৈর্ঘ্য = (2x – 10) মিটার

শর্তমতে, $(2x - 10)x = 1000$

বা, $2x^2 - 10x - 1000 = 0$

বা, $x^2 - 5x - 500 = 0$

বা, $x^2 - 25x + 20x - 500 = 0$

বা, $x(x - 25) + 20(x - 25) = 0$

∴ $x = 25$ [∵ $x \neq -20$, কারণ প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না]

∴ আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ = 25 মিটার

এবং দৈর্ঘ্য = (2 × 25 – 10) মিটার

= (50 – 10) মিটার

= 40 মিটার

∴ আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা = 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

= 2(40 + 25) মিটার

= (2 × 65) মিটার

= 130 মিটার **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P = a^2 - 9a - 6$

এবং $Q = a^3 + a^2 - 6a$

$$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{a^2 - 9a - 6}{a^3 + a^2 - 6a} = \frac{a^2 - 9a - 6}{a(a^2 + a - 6)}$$

$$= \frac{a^2 - 9a - 6}{a(a^2 + 3a - 2a - 6)}$$

$$= \frac{a^2 - 9a - 6}{a\{a(a + 3) - 2(a + 3)\}}$$

$$= \frac{a^2 - 9a - 6}{a(a + 3)(a - 2)}$$

ধরি, $\frac{a^2 - 9a - 6}{a(a + 3)(a - 2)} \equiv \frac{A}{a} + \frac{B}{a + 3} + \frac{C}{a - 2}$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $a(a + 3)(a - 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$a^2 - 9a - 6 \equiv A(a + 3)(a - 2) + Ba(a - 2) + Ca(a + 3)$

বা, $a^2 - 9a - 6 \equiv A(a^2 + a - 6) + B(a^2 - 2a) + C(a^2 + 3a)$

বা, $a^2 - 9a - 6 \equiv (A + B + C)a^2 + (A - 2B + 3C)a - 6A$ ... ... (ii)

(ii) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B + C = 1$ ... ... (iii)

$A - 2B + 3C = -9$ ... ... (iv)

এবং $-6A = -6$ ∴ $A = 1$

A এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $1 + B + C = 1$

বা, $B + C = 0$

∴ $2B + 2C = 0$ ... ... (v)

(iv) ও (v) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $1 + 5C = -9$

বা, $5C = -10$ ∴ $C = -2$

C এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই, $2B + 2(-2) = 0$

বা, $2B = 4$ ∴ $B = 2$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{a^2 - 9a - 6}{a(a + 3)(a - 2)} \equiv \frac{1}{a} + \frac{2}{a + 3} - \frac{2}{a - 2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০২ $A = \left(k + \frac{x}{2}\right)^5$ এবং $B = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots$

ক. $k = 1$ হলে A কে প্যাসক্যাল ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. B এর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. $A = 32 - px + qx^2 + rx^3 + \ldots\ldots\ldots$ হলে, p, q ও r এর মান নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \left(k + \frac{x}{2}\right)^5$

$k = 1$ হলে, $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে,

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$$\therefore A = 1 + 5\left(\frac{x}{2}\right) + 10\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{x}{2}\right)^5$$

$$= 1 + \frac{5x}{2} + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{4} + \frac{5x^4}{16} + \frac{x^5}{32}$$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots$

$= 4(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots\ldots + n$ তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\{(10 + 100 + 1000 + \ldots\ldots + n$ তম পদ) – (1 + 1 + 1 + ... + n তম পদ)}

$$= \frac{4}{9}\left\{10.\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n\right\} = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$$

অতএব, B ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \left(k + \frac{x}{2}\right)^5$

'ক' এর প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে পাই,

$A = k^5 + 5k^4\left(\frac{x}{2}\right) + 10k^3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10k^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5k\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{x}{2}\right)^5$

$= k^5 + \frac{5}{2}k^4x + \frac{5}{2}k^3x^2 + \frac{5}{4}k^2x^3 + \frac{5}{16}kx^4 + \frac{x^5}{32}$

$A = 32 - px + qx^2 + rx^3 + \ldots \ldots \ldots$ হলে,

$k^5 = 32 = 2^5$

$\therefore k = 2$

$-p = \frac{5}{2}k^4 = \frac{5}{2}(2)^4 = 40$

$\therefore p = -40$

$q = \frac{5}{2}k^3 = \frac{5}{2}(2)^3 = 20$

এবং $r = \frac{5}{4}k^2 = \frac{5}{4} \times 2^2 = 5$

$\therefore p = -40, q = 20$ ও $r = 5$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $f(x) = \ln\frac{5+x}{5-x}$.

ক. $m^{m\sqrt{m}} = (m\sqrt{m})^m$ হলে m এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $abc = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p^x + p^{-y} + 1} + \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1} = 1$ ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $m^{m\sqrt{m}} = (m\sqrt{m})^m$

বা, $\left(m^{m\sqrt{m}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left\{(m\sqrt{m})^m\right\}^{\frac{1}{m}}$

বা, $m^{\sqrt{m}} = m\sqrt{m}$

বা, $m^{\sqrt{m}} = m^1.m^{\frac{1}{2}}$

বা, $m^{\sqrt{m}} = m^{1+\frac{1}{2}}$

বা, $m^{\sqrt{m}} = m^{\frac{3}{2}}$

বা, $\sqrt{m} = \frac{3}{2}$

$\therefore m = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $abc = 1$

$\therefore \sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b}$ এবং $\sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

বা, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$ বা, $b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$

বা, $a = b^{\frac{x}{y}}$ $\therefore b = c^{\frac{y}{z}}$

বা, $a = \left(c^{\frac{y}{z}}\right)^{\frac{x}{y}}$ $\left[b = c^{\frac{y}{z}} \text{ বসিয়ে}\right]$

$\therefore a = c^{\frac{x}{z}}$

প্রশ্নমতে, $abc = 1$ বা, $c^{\frac{x}{z}}.c^{\frac{y}{z}}.c = 1$

বা, $c^{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1} = c^0$ বা, $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 = 0$

বা, $\frac{x+y+z}{z} = 0$ বা, $x + y + z = 0$

$\therefore x + y = -z, y + z = -x$ এবং $x + z = -y$

বামপক্ষ $= \frac{1}{p^x + p^{-y} + 1} + \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1}$

$= \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1} + \frac{1}{p^x + p^{-y} + 1}$

$= \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + \frac{1}{p^x} + 1} + \frac{1}{p^x + \frac{1}{p^y} + 1}$

$= \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{p^x}{p^x.p^z + 1 + p^x} + \frac{p^y}{p^y.p^x + 1 + p^y}$

$= \frac{1}{p^y + p^{x+y} + 1} + \frac{p^x}{1 + p^{x+z} + p^x} + \frac{p^y}{1 + p^{x+y} + p^y}$

[$-z = x + y$ বসিয়ে]

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{x+y}} + \frac{p^x}{1 + p^{-y} + p^x} + \frac{p^y}{1 + p^{x+y} + p^y}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{x+y}} + \frac{p^x}{1 + \frac{1}{p^y} + p^x} + \frac{p^y}{1 + p^{x+y} + p^y}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{x+y}} + \frac{p^x.p^y}{1 + p^y + p^{x+y}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{x+y}}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{x+y}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{x+y}} + \frac{p^{x+y}}{1 + p^y + p^{x+y}}$

$= \frac{1 + p^y + p^{x+y}}{1 + p^y + p^{x+y}} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{p^x + p^{-y} + 1} + \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ উদ্দীপক হতে পাই, $y = f(x) = \ln\frac{5+x}{5-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়,

সেহেতু $\frac{5+x}{5-x} > 0$ হবে যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

শর্ত (i) হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$ $\therefore x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\} \cap (x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

শর্ত (ii) হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$ $\therefore x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap \{x : x > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন,

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

রেঞ্জ : $y = f(x) = \ln\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = 5e^y - 5$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

দেখা যাচ্ছে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

সুতরাং, ডোমেন, $D_f = (-5, 5)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

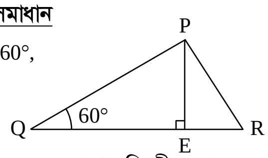
প্রশ্ন ▸ ০৪ ΔPQR এর QR বাহু A ও B বিন্দুতে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়েছে।

ক. প্রদত্ত ত্রিভুজে $\angle PQR = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR.$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PB^2 = 2(AP^2 + AB^2)$. ৪

গ. দেখাও যে, $PQ^2 + PR^2 = PA^2 + PB^2 + 4AB^2$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান



ক দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle PQR = 60°$,

প্রমাণ করতে হবে যে,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$

অঙ্কন : $PE \perp QR$ আঁকি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

$\therefore$ ΔPQR এর $\angle PQR = 60°$, অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং QE, QR এর ওপর PQ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QE$ ... ... (i)

সমকোণী ΔPQE-এ লম্ব PE, ভূমি QE এবং অতিভুজ PQ

$\therefore \cos \angle PQE = \frac{QE}{PQ}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

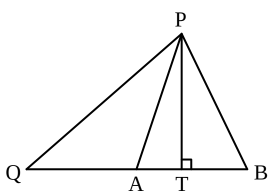
বা, $\cos 60° = \frac{QE}{PQ}$ $[\because \angle PQE = 60°]$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{QE}{PQ}$ $\therefore QE = \frac{1}{2}PQ$

এখন, (i)নং-এ QE-এর মান বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.\frac{1}{2}PQ$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ **(প্রমাণিত)**



খ **বিশেষ নির্বচন :** মনে করি, ΔPQB-এ QA = AB এবং PA মধ্যমা QB বাহুকে A বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$PQ^2 + PB^2 = 2(AP^2 + AB^2)$

অঙ্কন : QB বাহুর উপর PT লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔPQA এর $\angle PAQ$ স্থূলকোণ এবং QA রেখার বর্ধিতাংশের উপর PA রেখার লম্ব অভিক্ষেপ AT। স্থূলকোণের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PA^2 + QA^2 + 2QA.AT$ ... ... (i)

এখানে, ΔPBA এর $\angle PAB$ সূক্ষ্মকোণ এবং AB রেখার উপর PA রেখার লম্ব অভিক্ষেপ AT.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই, $PB^2 = PA^2 + BA^2 - 2BA.AT$ ... ... (ii)

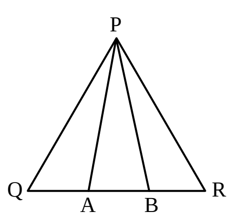
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PB^2 = PA^2 + QA^2 + 2QA.AT + PA^2 + BA^2 - 2BA.AT$

$= 2PA^2 + QA^2 + BA^2 + 2QA.AT - 2BA.AT$

$= 2PA^2 + QA^2 + QA^2 + 2QA.AT - 2QA.AT$ $[\because QA = BA]$

$= 2PA^2 + 2QA^2 = 2(AP^2 + AB^2)$ **(প্রমাণিত)**



গ **বিশেষ নির্বাচন :** দেওয়া আছে, ΔPQR এর QR বাহু A ও B বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়। অর্থাৎ, OA = AB = BR।

P, A ও P, B যোগ করি। দেখাতে হবে যে,

$PQ^2 + PR^2 = PA^2 + PB^2 + 4AB^2$

প্রমাণ : ΔPQB এর মধ্যমা PA

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$PQ^2 + PB^2 = 2(PA^2 + AB^2)$ ... ... (i)

আবার, ΔPAR এ মধ্যমা PB

$\therefore PA^2 + PR^2 = 2(PB^2 + AB^2)$ ... ... (ii)

এখন, (i) ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PB^2 + PA^2 + PR^2 = 2PA^2 + 2AB^2 + 2PB^2 + 2AB^2$

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2PA^2 + 2PB^2 + 4AB^2 - PA^2 - PB^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = PA^2 + PB^2 + 4AB^2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ *PQRS* একটি চতুর্ভুজ এবং *PR* ও *QS* দুটি কর্ণ।

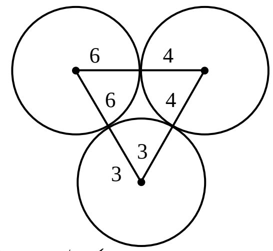
ক. 6 সে.মি, 4 সে.মি. ও 3 সে. মি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিসীমা নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে প্রমাণ কর যে, *PQ.QS = PQ.SR + PS.QR* ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

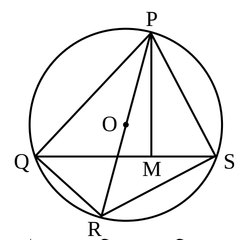
ক



এখানে, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে (6 + 4) বা 10 সে.মি., (4 + 3) বা 7 সে.মি. এবং (6 + 3) বা 9 সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা = (10 + 7 + 9) সে.মি.

= 26 সে.মি. **(Ans.)**



খ **বিশেষ নির্বচন :** মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে,

PR.QS = PQ. SR + PS.QR.

অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$-এর সমান করে $\angle SPM$ আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে $\angle QPR = \angle SPM$

উভয়পক্ষে $\angle RPM$ যোগ করে পাই,

$\angle QPR + \angle RPM = \angle SPM + \angle RPM$

অর্থাৎ, $\angle QPM = \angle RPS$

এখন ΔPQM ও ΔPRS এর মধ্যে $\angle QPM = \angle RPS$

$\angle PQM = \angle PRS$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PMQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore$ ΔPQM ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ, PR.QM = PQ.RS ... . (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPM$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = PSM$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PMS$

$\therefore$ ΔPQR ও ΔPMS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$

অর্থাৎ, PR.MS = QR.PS ... ... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

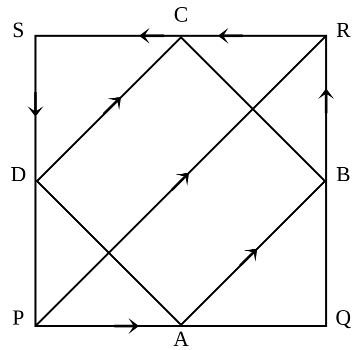
PR.QM + PR.MS = PQ.RS + QR.PS

বা, PR(QM + MS) = PQ.RS + QR.PS

বা, PR.QS = PQ.RS + QR.PS [যেহেতু QM + MS = QS]

$\therefore$ PR.QS = PQ.SR + PS.QR. **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে A, B, C ও D। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : ধরি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{q}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{r}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{s}$

P, R যোগ করা হলো।

তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{r})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$, $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{p})$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{p} + \underline{q}$ এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \underline{r} + \underline{s}$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থাৎ $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারকরেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়।

$\therefore$ ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল। $\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$.

এখন, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$ $\therefore AB = DC$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৬ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু $P(5, 3)$, $Q(-4, 2)$, $R(-2, -1)$ ও $S(3, k)$ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক. PQ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. $PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ΔPQS এর ক্ষেত্রফলের $\frac{56}{43}$ গুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $A(x, y)$ বিন্দুটি P ও Q বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $9x + y - 7 = 0$. ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (5, 3) ও (– 4, 2)

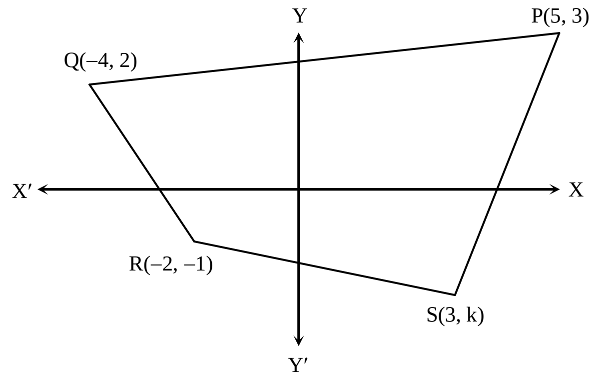
$\therefore$ PQ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-(-4)} = \frac{y-3}{3-2}$

বা, $\frac{x-5}{9} = \frac{y-3}{1}$

বা, $x - 5 = 9y - 27$

$\therefore x - 9y + 22 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, PQRS চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু P(5, 3), Q(– 4, 2), R(–2, – 1) ও S(3, k)



PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & k & 3 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(10 + 4 - 2k + 9 - 5k + 3 + 4 + 12)$

$= \frac{1}{2}(42 - 7k) = 21 - \frac{7}{2}k$ বর্গএকক

আবার, ΔPQS এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & k & 3 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(10 - 4k + 9 - 5k - 6 + 12)$

$= \frac{1}{2}(25 - 9k)$ বর্গএকক

শর্তমতে, PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{56}{43}\cdot$ ΔPQS এর ক্ষেত্রফল

বা, $21 - \frac{7}{2}k = \frac{56}{43}\left\{\frac{1}{2}(25 - 9k)\right\}$

বা, $903 - \frac{301}{2}k = 700 - 252k$

বা, $-\frac{203}{2}k = 203$

$\therefore k = -2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, A(x, y) বিন্দুটি P(5, 3) ও Q(– 4, 2) বিন্দু হতে সমদূরবর্তী।

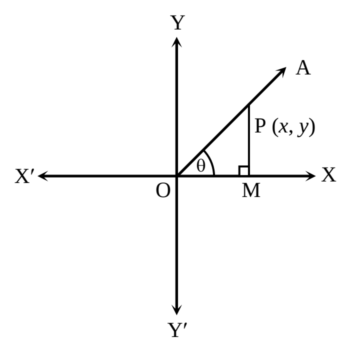
শর্তমতে, PA = QA

বা, $\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$

বা, $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4$

বা, $18x + 2y - 14 = 0$ $\therefore 9x + y - 7 = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৭



ক. $20°24'35''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = a$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \frac{2a}{a^2 + 1}$. ৪

গ. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $20°24'35''$

$= 20° + \left(\frac{24}{60}\right)^° + \left(\frac{35}{60 \times 60}\right)^°$

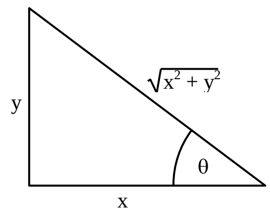
$= \left(20 + \frac{2}{5} + \frac{7}{720}\right)^° = \left(\frac{14400 + 288 + 7}{720}\right)^°$

$= \left(\frac{14695}{720}\right)^° = \left(\frac{2939}{144}\right)^°$

$= \frac{2939}{144} \times \frac{\pi^c}{180}$

$= 0.3562^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে, $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = a$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = a$ ... ... (i)

আবার, আমরা জানি,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $a(\sec\theta - \tan\theta) = 1$ [(i) নং হতে]

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{a}$ ... ... (ii)

(i) + (ii) করে পাই,

$2 \sec\theta = \frac{1}{a} + a$

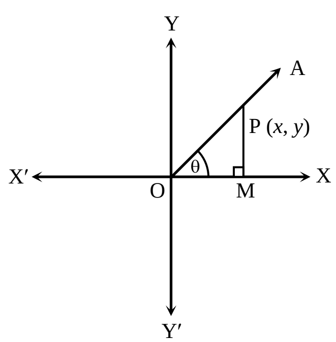
বা, $2 \sec\theta = \frac{1 + a^2}{a}$

বা, $\sec\theta = \frac{a^2 + 1}{2a}$

বা, $\frac{1}{\sec\theta} = \frac{2a}{a^2 + 1}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\therefore \cos\theta = \frac{2a}{a^2 + 1}$ **(প্রমাণিত)**

গ



প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot\theta + \tan\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4 \tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয়, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ $= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ θ এর সম্ভাব্য সকল মান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ একটি ঝুড়িতে 10টি লাল, 12টি হলুদ, 8টি কালো এবং 15টি সাদা বল আছে।

ক. একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করলে উভয় ক্ষেত্রে একই ফলাফল আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হলে বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা ও কালো হওয়ার সম্ভাবনার পার্থক্য নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রতিস্থাপন না করে পরপর তিনটি বল তোলা হলে সবগুলো বল হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপের জন্য প্রাপ্ত ফলাফলের নমুনা ক্ষেত্র :

{HH, HT, TH, TT}

$\therefore$ উভয়ক্ষেত্রে একই ফলাফল আসার সম্ভাবনা $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, লাল বলের সংখ্যা = 10টি

হলুদ বলের সংখ্যা = 12টি

কালো বলের সংখ্যা = 8টি

এবং সাদা বলের সংখ্যা = 15টি

$\therefore$ মোট বলের সংখ্যা = (10 + 12 + 8 +15)টি = 45টি

$\therefore$ দৈবভাবে একটি বল নেয়া হলে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা $= \left(1 - \frac{2}{9}\right) = \frac{9 - 2}{9} = \frac{7}{9}$

আবার, বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{45}$

$\therefore$ সম্ভাবনার পার্থক্য $= \left(\frac{7}{9} - \frac{8}{45}\right)$

$= \frac{35 - 8}{45} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

গ এখানে, হলুদ বল 12টি

এবং মোট বল 45টি

প্রতিস্থাপন না করে পর পর তিনটি বল তোলা হলে,

প্রথম বলটি হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{12}{45}$

দ্বিতীয় বলটি হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{11}{44}$

তৃতীয় বলটি হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{43}$

$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে পর পর তিনটি বল তোলা হলে সবগুলো বল হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা $= \left(\frac{12}{45} \times \frac{11}{44} \times \frac{10}{43}\right)$

$= \frac{2}{129}$ **(Ans.)**

দিনাজপুর বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. নিচের কোনটি $\{x \in \mathbb{R} : -3 \le x < 3\}$ সেটকে নির্দেশ করে?
ⓚ $\{-3, 3\}$ ⓛ $(-3, 3)$ ⓖ $(-3, 3]$ ⓘ $[-3, 3)$

২. $5x - 3y = 9$ সরলরেখার ঢাল কত?
ⓚ $\frac{-5}{3}$ ⓛ $\frac{-3}{5}$ ⓖ $\frac{5}{3}$ ⓘ $\frac{27}{5}$

৩. $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলির প্রকৃতি কোনটি?
ⓚ বাস্তব ও অমূলদ ⓛ বাস্তব ও মূলদ
ⓖ বাস্তব ও সমান ⓘ অবাস্তব

৪. নিচের কোনটি প্রতিসম রাশি?
ⓚ $6x^2 - 5xy + 4y^2$ ⓛ $xy^{-1} + yz^{-1} + zx^{-1}$
ⓖ $x^4 + 3x^2y^2 - y^4$ ⓘ $xy + yz + zx$

৫. কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত?
ⓚ স্থূলকোণী ত্রিভুজ ⓛ সমকোণী ত্রিভুজ
ⓖ সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ⓘ সমবাহু ত্রিভুজ

৬. কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস 6 সেমি হলে, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
ⓚ 6 সেমি ⓛ 3 সেমি ⓖ 1.5 সেমি ⓘ 0.75 সেমি

৭. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি 90° হলে–
i. এর অতিভুজের দৈর্ঘ্য = $6\sqrt{2}$ সে.মি.
ii. সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের প্রত্যেকের মান = 45°
iii. সমকৌণিক শীর্ষবিন্দু থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য = $3\sqrt{2}$ সে.মি.
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৮. $5x^2 - 8x = 3$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত?
ⓚ 124 ⓛ $2\sqrt{31}$ ⓖ 4 ⓘ 2

৯. কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2 সেমি হলে, বৃত্তের 11 সেমি দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ কোণ কত?
ⓚ $\frac{11}{2}$ রেডিয়ান ⓛ $\frac{2}{11}$ রেডিয়ান ⓖ 99° ⓘ 60°

১০. নিচের কোন বিন্দুটি $3x + 2y > 5$ অসমতার জন্য সত্য?
ⓚ $(3, -2)$ ⓛ $(-3, 8)$ ⓖ $(-3, -5)$ ⓘ $(-2, 4)$

১১. একটি ধারার n তম পদ $= 2 - (-2)^{n-1}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ ধারার ৩য় পদ = – 21 ⓛ ধারার ৫ম পদ = – 14
ⓖ ধারার ৬ষ্ঠ পদ = – 4 ⓘ ধারার ৭ম পদ = – 1

১২. সাধারণ অনুপাত এর মান নিচের কোনটি হলে, কোনো অসীম গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব?
ⓚ – 2 ⓛ – 1 ⓖ – 0.5 ⓘ 1.5

১৩. – 1060° কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?
ⓚ ১ম ⓛ ২য় ⓖ ৩য় ⓘ ৪র্থ

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৪ ও ১৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$\tan A = \frac{7}{24}$.

১৪. tan$A$ এবং cos$A$ একই চিহ্নযুক্ত হলে sin$A$ এর মান কত?
ⓚ $\frac{-24}{25}$ ⓛ $\frac{-7}{25}$ ⓖ $\frac{7}{25}$ ⓘ $\frac{24}{25}$

১৫. cot$A$ ও cosec$A$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে cosec$A$ এর মান কত?
ⓚ $\frac{25}{7}$ ⓛ $\frac{24}{7}$ ⓖ $\frac{-24}{7}$ ⓘ $\frac{-25}{7}$

১৬. $3^{3x} = 9^{x+1}$ হলে x এর মান কত?
ⓚ 4 ⓛ 2 ⓖ 1 ⓘ 0

১৭. $f(x) = \ln(x-2)$ এর ডোমেন কোনটি?
ⓚ $R - \{2\}$ ⓛ $\{x \in R : x \ge -2\}$
ⓖ $\{x \in R : x \ge 2\}$ ⓘ $\{x \in R : x > 2\}$

১৮. $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$ এর বিস্তৃতির ৩য় পদ কোনটি?
ⓚ $-\frac{x^3}{2}$ ⓛ $-\frac{3x^2}{2}$ ⓖ $\frac{3x^2}{2}$ ⓘ $\frac{x^3}{2}$

১৯. PQR একটি ত্রিভুজ হলে, নিচের কোনটি ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি নির্দেশ করে?
ⓚ $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{PQ}$ ⓛ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RP}$
ⓖ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{RP}$ ⓘ $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{RP}$

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ২০ ও ২১নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(6, -6)$, $B(4, -8)$, $C(-6, 6)$ এবং $D(-4, 8)$

২০. A এবং C বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি?
ⓚ $12\sqrt{2}$ একক ⓛ 12 একক ⓖ $6\sqrt{2}$ একক ⓘ 4 একক

২১. A এবং D বিন্দুগামী রেখার ঢাল কোনটি?
ⓚ $-\frac{7}{5}$ ⓛ $-\frac{1}{5}$ ⓖ 1 ⓘ 7

২২. 8 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট গোলকের সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি.?
ⓚ $\frac{2048}{3}\pi$ ⓛ 256π ⓖ $\frac{256}{3}\pi$ ⓘ 64π

২৩. 6 সে.মি. ভূমির ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং 10 সে. মি. হেলানো উচ্চতাবিশিষ্ট কোণকের আয়তন কত?
ⓚ 360π ঘন সেমি ⓛ 288π ঘন সেমি
ⓖ 120π ঘন সেমি ⓘ 96π ঘন সেমি

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ২৪ ও ২৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
40টি টিকেটে 1 থেকে 40 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে।

২৪. টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে দৈবভাবে একটি টিকেট নেওয়া হলে, ক্রমিক নম্বরটি 40 এর গুণনীয়ক হবার সম্ভাবনা কত?
ⓚ $\frac{1}{5}$ ⓛ $\frac{3}{20}$ ⓖ $\frac{1}{10}$ ⓘ $\frac{1}{20}$

২৫. টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে দৈবভাবে একটি টিকেট নেওয়া হলে, ক্রমিক নম্বরটি মৌলিক হবার সম্ভাবনা কত?
ⓚ $\frac{13}{40}$ ⓛ $\frac{3}{10}$ ⓖ $\frac{1}{4}$ ⓘ $\frac{1}{5}$

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

দিনাজপুর বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $f(x) = \frac{3x-2}{3x+4}$ এবং $g(y) = (y-2)(y^2+3)$.

ক. $3x^2 + 5x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা–যাচাই কর। ৪

গ. $\frac{y}{g(y)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $P^2 + Q^2 = 51PQ$ এবং $A = m + 5 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$.

ক. $f(x) = \ln(2-x)$ ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{P-Q}{7}\right) = \log\sqrt{P} + \log\sqrt{Q}$. ৪

গ. $A = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^3 + 15m^2 + 66m + 68 = 0$. ৪

৩। (*i*) $(2+5x)^{-1} + (2+5x)^{-2} + (2+5x)^{-3} + ...$ একটি অসীম ধারা।

(*ii*) $B = \left(3k - \frac{2x}{3}\right)^7$

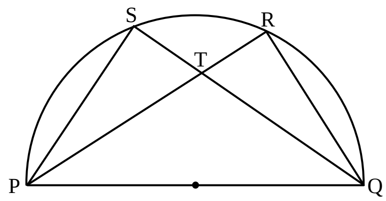
ক. $(1-2x)^5$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 15120 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



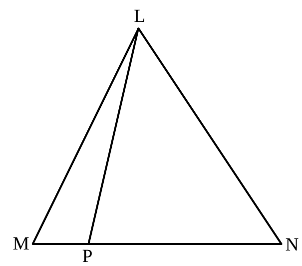
চিত্রে PQ ব্যাস। $PQ = 10$ সে. মি. ও $QR = 6$ সে. মি.।

ক. কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল 256 বর্গ সে. মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = PR.PT + QS.QT$. ৪

গ. PQR ত্রিভুজকে PR বাহুর চতুর্দিকে একবার ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৫।



ক. $A(5, 6)$ এবং $B(1, 3)$ হলে, AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. $LM = LN$ হলে, প্রমাণ কর যে, $LM^2 - LP^2 = MP.PN$. ৪

গ. Q ও R বিন্দু যথাক্রমে LM ও LN এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel QR$ এবং $QR = \frac{1}{2}MN$. ৪

৬। $D(5, 9), E(-6, -7), F(15, -7)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

ক. D ও E বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x, y)$ বিন্দু হতে x-অক্ষের দূরত্ব এবং E বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + 12x + 14y + 85 = 0$. ৪

গ. DEF ত্রিভুজের যে অংশ x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $a = \text{cosec}\theta$ এবং $b = \cot\theta$.

ক. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3 : 5 : 7$ হলে, বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয়মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a + b = p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sec\theta = \frac{p^2+1}{p^2-1}$. ৪

গ. $3a^2 + 2b^2 = 18$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (*i*) একজন লোকের টাঙ্গাইল হতে ঢাকা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$ এবং ঢাকা হতে চট্টগ্রাম ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{10}$

(*ii*) একটি থলেতে 15টি লাল, 18টি সবুজ ও 14টি হলুদ বল আছে।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. Probability tree ব্যবহার করে লোকটির ঢাকা বাসে কিন্তু চট্টগ্রাম ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি বল তুলে নেয়া হয়, তবে সবগুলো বল সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	ঘ	২	গ	৩	খ	৪	ঘ	৫	ক	৬	গ	৭	ঘ	৮	ক	৯	ক	১০	খ	১১	খ	১২	গ	১৩	ক
	১৪	গ	১৫	ঘ	১৬	খ	১৭	ঘ	১৮	গ	১৯	খ	২০	ক	২১	ক	২২	ঘ	২৩	ঘ	২৪	ক	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $f(x) = \frac{3x-2}{3x+4}$ এবং $g(y) = (y-2)(y^2+3)$.

ক. $3x^2 + 5x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা–যাচাই কর। ৪

গ. $\frac{y}{g(y)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ : $3x^2 + 5x + 2 = 0$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 3, b = 5$ এবং $c = 2$

$\therefore$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= 5^2 - 4.3.2$

$= 25 - 24$

$= 1 > 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক শূন্য থেকে বড় এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা। তাই সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ। **(Ans.)**

খ ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম f

f(x) এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\frac{3x_1 - 2}{3x_1 + 4} = \frac{3x_2 - 2}{3x_2 + 4}$

বা, $9x_1x_2 - 6x_1 + 12x_2 - 8 = 9x_1x_2 + 12x_1 - 6x_2 - 8$

বা, $-18x_1 = -18x_2 \quad \therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ f(x) ফাংশনটি এক-এক ফাংশন। **(যাচাই করা হলো)**

গ দেওয়া আছে, $g(y) = (y-2)(y^2+3)$

$\therefore \frac{y}{g(y)} = \frac{y}{(y-2)(y^2+3)}$

ধরি, $\frac{y}{(y-2)(y^2+3)} \equiv \frac{A}{y-2} + \frac{By+C}{y^2+3}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(y-2)(y^2+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$y = A(y^2+3) + (By+C)(y-2)$ ... ... (ii)

বা, $y = Ay^2 + 3A + By^2 - 2By + Cy - 2C$

$\therefore y = (A+B)y^2 + (C-2B)y + 3A - 2C$ ... ... (iii)

(ii) নং এ $y = 2$ বসিয়ে, $2 = A.(2^2+3) + 0$

বা, $7A = 2 \therefore A = \frac{2}{7}$

(iii) নং এর উভয়পক্ষ হতে y^2 এবং y পদের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$

বা, $B = -A \therefore B = -\frac{2}{7}$

এবং $C - 2B = 1$

বা, $C + \frac{4}{7} = 1$

বা, $C = 1 - \frac{4}{7} \therefore C = \frac{3}{7}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{y}{(y-2)(y^2+3)} \equiv \frac{\frac{2}{7}}{y-2} + \frac{\left(-\frac{2}{7}\right)y + \frac{3}{7}}{y^2+3} = \frac{2}{7(y-2)} + \frac{3-2y}{7(y^2+3)};$$

এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $P^2 + Q^2 = 51PQ$ এবং $A = m + 5 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$.

ক. $f(x) = \ln(2-x)$ ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{P-Q}{7}\right) = \log\sqrt{P} + \log\sqrt{Q}$. ৪

গ. $A = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^3 + 15m^2 + 66m + 68 = 0$. ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(2-x)$

f(x) ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2 - x > 0$

বা, $x < 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x < 2\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P^2 + Q^2 = 51PQ$

বা, $P^2 - 2PQ + Q^2 = 49PQ$ বা, $(P-Q)^2 = 49PQ$

বা, $P - Q = 7\sqrt{P}.\sqrt{Q}$ বা, $\frac{P-Q}{7} = \sqrt{P}.\sqrt{Q}$

বা, $\log\left(\frac{P-Q}{7}\right) = \log(\sqrt{P}.\sqrt{Q})$

$\therefore \log\left(\frac{P-Q}{7}\right) = \log\sqrt{P} + \log\sqrt{Q}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $A = m + 5 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$

শর্তমতে, $A = 0$

বা, $m + 5 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $m + 5 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ ... ... (i)

বা, $(m+5)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $m^3 + 3.m^2.5 + 3.m.5^2 + 125 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $m^3 + 15m^2 + 75m + 125 = 9 + 3 + 3.3^{\frac{2+1}{3}}(m+5)$ [(i) হতে]

বা, $m^3 + 15m^2 + 75m + 125 = 12 + 9m + 45$

$\therefore m^3 + 15m^2 + 66m + 68 = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ (i) $(2+5x)^{-1} + (2+5x)^{-2} + (2+5x)^{-3} + ...$ একটি অসীম ধারা।

(ii) $B = \left(3k - \frac{2x}{3}\right)^7$

ক. $(1-2x)^5$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 15120 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$(1-2x)^5 = 1 + 5(-2x) + 10(-2x)^2 + 10(-2x)^3 + 5(-2x)^4 + (-2x)^5$

$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \left(3k - \frac{2x}{3}\right)^7$

B এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ $= {}^7C_r(3k)^{7-r}\left(-\frac{2x}{3}\right)^r$

$= {}^7C_r 3^{7-2r}(-1)^r.2^r.k^{7-r}.x^r$

k^3 এর জন্য, $7 - r = 3 \;\therefore r = 4$

প্রশ্নমতে, ${}^7C_4.3^{7-2.4}.(-1)^4.2^4.x^4 = 15120$

বা, $35.\frac{1}{3}.16.x^4 = 15120$

বা, $x^4 = 81$

বা, $x^4 = 3^4$

$\therefore x = 3$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারা $(2 + 5x)^{-1} + (2 + 5x)^{-2} + (2 + 5x)^{-3} + ...$

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = (2 + 5x)^{-1} = \frac{1}{2 + 5x}$

সাধারণ অনুপাত, $r = (2 + 5x)^{-2} \div (2 + 5x)^{-1}$

$= \frac{1}{(2 + 5x)^2} \times (2 + 5x) = \frac{1}{2 + 5x}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{2 + 5x}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{2 + 5x} < 1$

তাহলে হয়, $-1 < \frac{1}{2 + 5x}$

বা, $2 + 5x < -1$

বা, $5x < -3$

$\therefore x < -\frac{3}{5}$

অথবা, $\frac{1}{2 + 5x} < 1$

বা, $2 + 5x > 1$

বা, $5x > -1$

$\therefore x > -\frac{1}{5}$

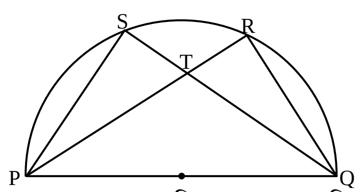
$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{3}{5}$ অথবা $x > -\frac{1}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1 - r} = \dfrac{\frac{1}{2 + 5x}}{1 - \frac{1}{2 + 5x}}$

$= \frac{1}{2 + 5x} \times \frac{2 + 5x}{2 + 5x - 1}$

$= \frac{1}{5x + 1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৪



চিত্রে *PQ* ব্যাস। *PQ* = 10 সে. মি. ও *QR* = 6 সে. মি.।

ক. কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল 256 বর্গ সে. মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = PR.PT + QS.QT$. ৪

গ. *PQR* ত্রিভুজকে *PR* বাহুর চতুর্দিকে একবার ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল 256 বর্গ সেমি।

পরিবৃত্তটির ব্যাসার্ধ r একক হলে, $\pi r^2 = 256$

বা, $r^2 = \frac{256}{\pi}$

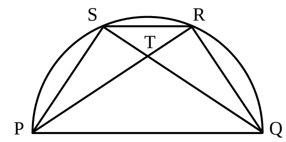
$\therefore r = 9.027$ সেমি (প্রায়)

নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক হলে, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r' = \frac{r}{2} = \frac{9.027}{2} = 4.5135$ সেমি (প্রায়)

$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r'^2 = \pi.(4.5135)^2$ বর্গ সেমি

$= 64$ বর্গ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, PQ ব্যাসের ওপর PQRS একটি অর্ধবৃত্ত। PR ও QS জ্যাদ্বয় পরস্পর T বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = PR.PT + QS.QT$।

অঙ্কন : R, S যোগ করি।

প্রমাণ : ΔRTS ও ΔPTQ-এ

$\angle TSR = \angle TPQ$ [একই চাপ QR-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle STR = \angle PTQ$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

অবশিষ্ট $\angle TRS$ = অবশিষ্ট $\angle TQP$

$\therefore \Delta RTS$ ও ΔPTQ সদৃশ।

$\therefore \frac{PT}{ST} = \frac{QT}{RT}$

বা, $PT.RT = QT.ST$

বা, $PT.RT + PT^2 = QT.ST + PT^2$ [উভয়পক্ষে PT^2 যোগ করে]

বা, $PT(RT + PT) = QT.ST + ST^2 + PS^2$

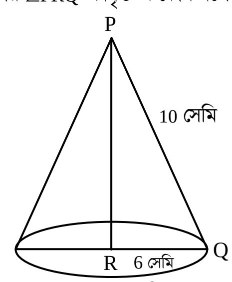
[PQ ব্যাস বলে $\angle PST = \angle PSQ = 90°$; $\therefore PT^2 = PS^2 + ST^2$]

বা, $PT.PR = PQ^2 - QS(QS - ST)$

বা, $PT.PR = PQ^2 - QS.QT$

$\therefore PQ^2 = PR.PT + QS.QT$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্রে, PQR ত্রিভুজের $\angle PRQ$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজ।



এখন, ত্রিভুজটিকে PR বাহুর চারদিকে ঘুরালে সমবৃত্তভূমিক কোণক উৎপন্ন হবে।

কোণকটির ভূমির ব্যাসার্ধ, r = QR = 6 সেমি

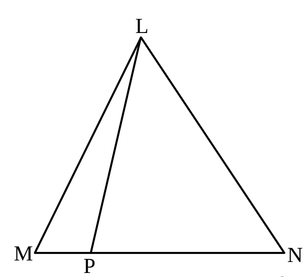
এবং হেলানো উচ্চতা, l = PQ = 10 সেমি।

$\therefore$ কোণকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(r + l)$ বর্গএকক

$= \pi.6(6 + 10)$ বর্গ সেমি

$= 301.5936$ বর্গ সেমি **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৫



ক. *A*(5, 6) এবং *B*(1, 3) হলে, *AB* রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. *LM* = *LN* হলে, প্রমাণ কর যে, $LM^2 - LP^2 = MP.PN$. ৪

গ. *Q* ও *R* বিন্দু যথাক্রমে *LM* ও *LN* এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel QR$ এবং $QR = \frac{1}{2}MN$. ৪

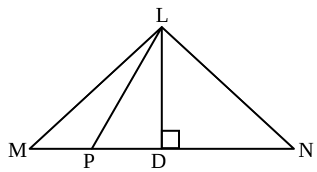
৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(5, 6) এবং B(1, 3) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-1} = \frac{y-6}{6-3}$

বা, $\frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{3}$ বা, $3x - 15 = 4y - 24$

$\therefore 3x - 4y + 9 = 0$ **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, ΔLMN-এ $LM = LN$। ভূমি MN-এর ওপর P যেকোনো একটি বিন্দু। MN এর উপর অঙ্কিত লম্ব LD। প্রমাণ করতে হবে যে, $LM^2 - LP^2 = MP.NP$।



প্রমাণ : ΔLMD এর $\angle LDM$ = এক সমকোণ এবং LM অতিভুজ [$\because LD \perp MN$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $LP^2 = LD^2 + MD^2$ ... ... (i)

আবার, ΔLPD এর $\angle LDP$ = এক সমকোণ এবং LP অতিভুজ [$\because LD \perp NM$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $LM^2 = LD^2 + PD^2$ ... ... (ii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$LM^2 - LP^2 = LD^2 + MD^2 - LD^2 - PD^2$

বা, $LM^2 - LP^2 = MD^2 - PD^2$

বা, $LM^2 - LP^2 = (MD + PD)(MD - PD)$

বা, $LM^2 - LP^2 = (MD + PD).MP$

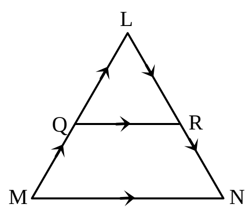
বা, $LM^2 - LP^2 = (ND + PD).MP$

[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ, MD = ND]

বা, $LM^2 - LP^2 = NP.MP$

$\therefore LM^2 - LP^2 = MP.PN$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, LMN ত্রিভুজের LM ও LN বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও R। Q, R যোগ করা হলো। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $QR = \frac{1}{2}MN$ এবং $QR \parallel MN$



প্রমাণ : Q ও R যথাক্রমে LM ও LN এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}$ এবং $\overrightarrow{LR} = \overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}$ ... . (i)

এবং $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QL} + \overrightarrow{LR} = -\overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{LR}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$ $\left[\because \overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} \text{ এবং } \overrightarrow{LR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ [সমীকরণ (i) হতে]

সুতরাং, $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MN}\right|$

$\therefore QR = \frac{1}{2}MN$ এবং $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{MN}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু Q ও R যথাক্রমে LM ও LN এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{MN}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore QR \parallel MN$

অর্থাৎ $QR = \frac{1}{2}MN$ এবং $QR \parallel MN$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ $D(5, 9)$, $E(-6, -7)$, $F(15, -7)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

ক. D ও E বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x, y)$ বিন্দু হতে x-অক্ষের দূরত্ব এবং E বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + 12x + 14y + 85 = 0$. ৪

গ. DEF ত্রিভুজের যে অংশ x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক D(5, 9) ও E(– 6, – 7) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{9+7}{5+6} = \frac{16}{11}$ **(Ans.)**

খ P(x, y) বিন্দু হতে x-অক্ষের দূরত্ব, PA = |y| একক

P(x, y) হতে E(– 6, – 7) বিন্দুর দূরত্ব,

$PE = \sqrt{(x+6)^2 + (y+7)^2}$ একক

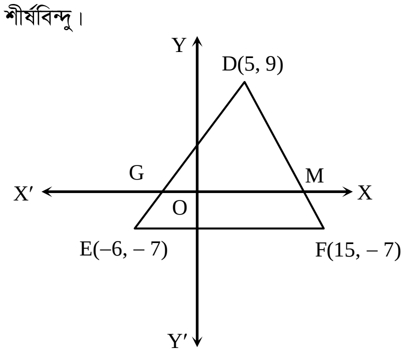
প্রশ্নমতে, PE = PA

বা, $\sqrt{(x+6)^2 + (y+7)^2} = y$

বা, $x^2 + 12x + 36 + y^2 + 14y + 49 = y^2$ [বর্গ করে]

$\therefore x^2 + 12x + 14y + 85 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, D(5, 9), E(– 6, – 7) ও F(15, – 7) একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।



এখন, D(5, 9) ও E(– 6, – 7) বিন্দুগামী DE রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-5}{5+6} = \frac{y-9}{9+7}$ বা, $16x - 80 = 11y - 90$

বা, $16x - 11y = -19$

$\therefore \frac{x}{\left(-\frac{19}{16}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{19}{11}\right)} = 1$

অর্থাৎ, G বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{19}{16}, 0\right)$

আবার, D(5, 9) ও F(15, – 7) বিন্দুগামী DF রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-5}{5-15} = \frac{y-9}{9+7}$ বা, $\frac{x-5}{-10} = \frac{y-9}{16}$

বা, $\frac{x-5}{-5} = \frac{y-9}{8}$

বা, $8x - 40 = -5y + 45$

বা, $8x + 5y = 85$

$\therefore \frac{x}{\left(\frac{85}{8}\right)} + \frac{y}{17} = 1$

অর্থাৎ, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{85}{8}, 0\right)$

DEF ত্রিভুজের x-অক্ষের সাথে উৎপন্নকারী ত্রিভুজ হলো DGM।

$\therefore$ DGM ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে বসিয়ে

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{-19}{16} & \frac{85}{8} & 5 & -\frac{19}{16} \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left(\frac{765}{8} + \frac{171}{16}\right)$ বর্গএকক

$= \frac{1701}{32}$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $a = \text{cosec}\theta$ এবং $b = \cot\theta$.

ক. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে, বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয়মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a + b = p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sec\theta = \frac{p^2+1}{p^2-1}$. ৪

গ. $3a^2 + 2b^2 = 18$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, ত্রিভুজের কোণত্রয় 3x, 5x ও 7x

শর্তমতে, $3x + 5x + 7x = \pi^c$

বা, $15x = \pi^c \quad \therefore x = \frac{\pi^c}{15}$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $= 7x = \frac{7\pi^c}{15}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = \text{cosec}\theta$ এবং $b = \cot\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $a + b = p$

বা, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = p$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = p$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = p$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = p^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = p^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = p^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = p^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$

$\therefore \sec\theta = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = \text{cosec}\theta$ এবং $b = \cot\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $3a^2 + 2b^2 = 18$

বা, $3\text{cosec}^2\theta + 2\cot^2\theta = 18$

বা, $\frac{3}{\sin^2\theta} + \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 18$

বা, $3 + 2\cos^2\theta = 18\sin^2\theta$

বা, $3 + 2(1 - \sin^2\theta) = 18\sin^2\theta$

বা, $3 + 2 - 2\sin^2\theta = 18\sin^2\theta$

বা, $20\sin^2\theta = 5$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4} \therefore \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

হয়, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

অথবা, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (*i*) একজন লোকের টাঙ্গাইল হতে ঢাকা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$ এবং ঢাকা হতে চট্টগ্রাম ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{10}$

(*ii*) একটি থলেতে 15টি লাল, 18টি সবুজ ও 14টি হলুদ বল আছে।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. Probability tree ব্যবহার করে লোকটির ঢাকা বাসে কিন্তু চট্টগ্রাম ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি বল তুলে নেয়া হয়, তবে সবগুলো বল সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

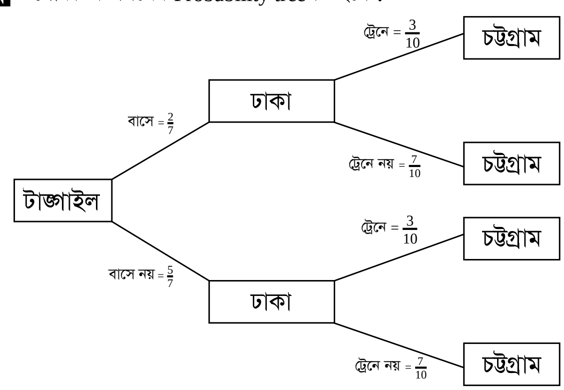
ক একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু 6টি এবং জোড় সংখ্যা 3টি

$\therefore$ একবার নিক্ষেপে ছক্কায় জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(Ans.)

খ লোকটির ভ্রমণের Probability tree টি হবে :



$\therefore$ লোকটির ঢাকা বাসে কিন্তু চট্টগ্রাম ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{2}{7} \times \frac{7}{10} = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, একটি থলেতে 15টি লাল, 18টি সবুজ ও 14টি হলুদ বল রয়েছে।

$\therefore$ মোট বল সংখ্যা = (15 + 18 + 14)টি = 47টি

প্রতিস্থাপন না করে পরপর চারটি বল তোলা হলে,

প্রথম বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{18}{47}$

দ্বিতীয় বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{17}{46}$

তৃতীয় বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{16}{45}$

চতুর্থ বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{15}{44}$

$\therefore$ পরপর চারটি বল তোলা হলে সবগুলো সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{18}{47} \times \frac{17}{46} \times \frac{16}{45} \times \frac{15}{44} = \frac{204}{11891}$ **(Ans.)**

ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৪

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড : 1 2 6**

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $2^x = 8^y$ হলে x : y এর মান নিচের কোনটি?
ⓚ 1 : 3 ⓚ্ষ 1 : 2
(ক) 1 : 3 (খ) 1 : 2 (গ) 2 : 1 (ঘ) 3 : 1

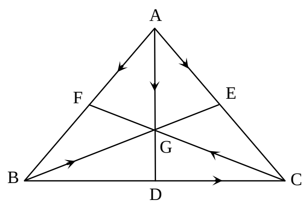
২. যদি $\pi < \theta \le \frac{3\pi}{2}$ এবং $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হয় তাহলে $\sin\theta$ = কত?
(ক) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (খ) $-\sqrt{5}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ঘ) 3

৩. একটি চাকা 1.75 কি.মি. পথ যেতে 50 বার ঘোরে। চাকাটির ব্যাস কত?
(ক) 14.41 মিটার (প্রায়) (খ) 14.11 মিটার (প্রায়)
(গ) 11.14 মিটার (প্রায়) (ঘ) 11.05 মিটার (প্রায়)

৪. $F(x) = e^{\frac{|x|}{2}}$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
(ক) $(-\infty, 0)$ (খ) $[0, \infty)$ (গ) $R - \{2\}$ (ঘ) R

৫. $(x^2 + 6x + 9)^{3n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 13 হলে n এর মান কত?
(ক) 3 (খ) 2 (গ) 1 (ঘ) –2

৬.



ΔABC এর ভরকেন্দ্র G হলে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ (খ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$
(গ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ (ঘ) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF} = 0$

৭. একটি ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা না উঠার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{5}{6}$ (ঘ) $\frac{1}{6}$

৮. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $9\underline{a} - 4\underline{b}$ এবং $4\underline{a} - 2\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ = কত?
(ক) $2\underline{b} - 5\underline{a}$ (খ) $5\underline{a} - 2\underline{b}$ (গ) $10\underline{a} - 5\underline{b}$ (ঘ) $10\underline{b} - 5\underline{a}$

৯. 4 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের ভূমির ক্ষেত্রফল?
(ক) $12\sqrt{3}$ (খ) $18\sqrt{3}$ (গ) $24\sqrt{3}$ (ঘ) $28\sqrt{3}$

১০. 3 সে.মি. উচ্চতা ও 4 সে.মি. ভূমির ব্যাসবিশিষ্ট সমবৃত্তভূমিক কোণকের–
i. বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\sqrt{13}\,\pi$ বর্গ সে.মি.
ii. ভূমির ক্ষেত্রফল = 4π বর্গ সে.মি.
iii. আয়তন = 4π ঘন সে.মি.
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$ এর ডোমেন কোনটি?
(ক) $\{x \in R : x \ge \frac{1}{2}\}$ (খ) $\{x \in R : x > \frac{1}{2}\}$
(গ) $\{x \in R : x < \frac{1}{2}\}$ (ঘ) $\{x \in R : x \le \frac{1}{2}\}$

১২. $ax^2 - 6x + 9 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হলে a এর মান কত?
(ক) –1 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 4

১৩. $F(a) = 2a^3 + 6a^2 - 6a + b$ বহুপদীটি $a - 1$ দ্বারা বিভাজ্য হলে b এর মান কত হবে?
(ক) –2 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 3

১৪. 2 – 2 + 2 – 2 +.......ধারার প্রথম (2n + 1) পদের সমষ্টি কত?
(ক) 3 (খ) 2 (গ) 1 (ঘ) –2

১৫. $2.8\dot{2}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ নিচের কোনটি?
(ক) $\frac{28}{90}$ (খ) $\frac{14}{9}$ (গ) $\frac{127}{45}$ (ঘ) $\frac{28}{9}$

১৬. $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কোনটি?
(ক) $\frac{6}{x^2}$ (খ) $-\frac{6}{x^2}$ (গ) $-4x$ (ঘ) $4x$

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
A(5, –2) এবং B(–1, 4) বিন্দুগামী রেখাটি X অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

১৭. রেখাটি X অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?
(ক) 45° (খ) 90° (গ) 135° (ঘ) 180°

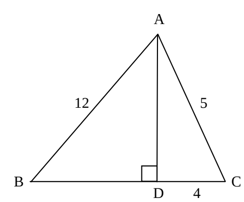
১৮. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত হবে?
(ক) (3, 0) (খ) (0, 3) (গ) (–3, 0) (ঘ) (0, –3)

১৯. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{y}{x}$ হলে $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ এর মান কত?
(ক) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$ (খ) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ (গ) $\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y}$

২০. A(1, –1), B(2, 2) এবং C(4, x) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে x এর মান কত?
(ক) 3 (খ) 5 (গ) 7 (ঘ) 8

২১. $F(x) = x^3 + 3$ হলে $F^{-1}(3)$ এর মান কত?
(ক) 27 (খ) 10 (গ) 4 (ঘ) 0

২২.



চিত্রে BD এর মান কত?
(ক) $\sqrt{149}$ (খ) $\sqrt{135}$ (গ) $\sqrt{131}$ (ঘ) $\sqrt{125}$

২৩. $9^{2x+2} = 25^{x+1}$ এর সমাধান নিচের কোনটি?
(ক) –3 (খ) –2 (গ) –1 (ঘ) 2

২৪. $y = x^2 + 4x + 1$ ফাংশনের লেখচিত্র কীরূপ?
(ক) বৃত্ত (খ) পরাবৃত্ত (গ) উপবৃত্ত (ঘ) অধিবৃত্ত

২৫. a > b এবং c < 0 হলে–
i. ac < bc ii. ac > bc iii. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৪

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : 1 2 6

[২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট

পূর্ণমান : ৫০

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $P = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ এবং $Q(x) = 1 - 8x^3$.

ক. $15x^3 + bx^2 - x - 8$ এর একটি উৎপাদক $3x + 2$ হলে, b এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = y = z$ অথবা, $xy + yz + zx = 0$. ৪

গ. $\frac{7x^2 - 2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। (i) $3(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots)$.

(ii) $a + ap + ap^2 + \ldots\ldots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

ক. $7x - 1 + 2x^2 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং ধারার **১ম** n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $a = p = \frac{1}{2x + 3}$ হলে, x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩। (i) $A = \left(y^2 + \frac{P}{y^2}\right)^6$.

(ii) $f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$.

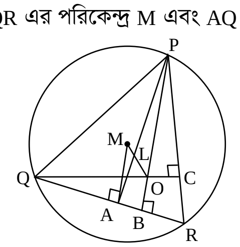
ক. $8^{2x} = 2^{x+1}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে y মুক্ত পদের মান 14580 হলে P এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং হতে $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪। নিচের চিত্রে ΔPQR এর পরিকেন্দ্র M এবং AQ = AR।



ক. একটি ঘনকের কর্ণ $3\sqrt{3}$ সে.মি. হলে, এর আয়তন নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, PL = 2AL. ৪

গ. $\angle R$ সূক্ষ্মকোণ হলে, QR.BR = PR.CR সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর। ৪

৫। A(1, 5), B(r, 2), C(3, – 4) এবং D(6, 0) যথাক্রমে ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

ক. AC রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 34 বর্গ একক হলে r এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ACD ত্রিভুজের AD ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || AC এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$. ৪

৬। একটি পঞ্চভুজের পাঁচটি শীর্ষবিন্দু হলো P(– 1, – 1), M(x, y), Q(1, 1), R(2, 7) এবং S(– 3, 2)।

ক. PQ রেখা x অক্ষের সাথে যে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. PM = 2QM হলে দেখাও যে, $3x^2 + 3y^2 - 10x - 10y + 6 = 0$. ৪

গ. PQRS চতুর্ভুজের যে অংশ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $P = \frac{\cot A + \text{cosec} A - 1}{\cot A - \text{cosec} A + 1}$ এবং $R = \tan\alpha + \sec\alpha$

ক. $-315°$ কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত চিত্রসহ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P = \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$. ৪

গ. যদি $R = \sqrt{3}$ এবং $0 < \alpha < 2\pi$ হয়, তবে α এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। একটি ঝুড়িতে 2x টি লাল, $(x + 6)$টি সাদা ও $(x + 3)$টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হল।

ক. 1টি মুদ্রা ও 1টি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree তৈরি কর। ২

খ. x = 3 হলে মার্বেলটি কালো অথবা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. x = 4 হলে যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয়, তবে দেখাও যে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা সবগুলো মার্বেল লাল হওয়ার সম্ভাবনার তিন গুণ। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	ক	৩	গ	৪	ঘ	৫	খ	৬	গ	৭	ক	৮	ক	৯	গ	১০	ঘ	১১	ঘ	১২	খ	১৩	ক
	১৪	খ	১৫	গ	১৬	ক	১৭	গ	১৮	ক	১৯	গ	২০	ঘ	২১	ঘ	২২	খ	২৩	গ	২৪	খ	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $P = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ এবং $Q(x) = 1 - 8x^3$.

ক. $15x^3 + bx^2 - x - 8$ এর একটি উৎপাদক $3x + 2$ হলে, b এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = y = z$ অথবা, $xy + yz + zx = 0$. ৪

গ. $\frac{7x^2 - 2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $f(x) = 15x^3 + bx^2 - x - 8$

$\therefore (3x + 2)$, $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে যদি $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ হয়।

এখন, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

বা, $15\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + b\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 8 = 0$

বা, $15 \times \left(\frac{-8}{27}\right) + \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - 8 = 0$

বা, $\frac{-40}{9} + \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - 8 = 0$

বা, $\frac{-40 + 4b + 6 - 72}{9} = 0$

বা, $4b - 106 = 0$

বা, $4b = 106$

বা, $b = \frac{106}{4}$

$\therefore b = \frac{53}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$

প্রশ্নমতে, $P = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 - 3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0 \therefore yz + zx + xy = 0$

অথবা, $\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

এখন, দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$ বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

$\therefore x = y$ ... ... (i)

আবার, $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$ বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

$\therefore y = z$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $x = y = z$

সুতরাং $yz + zx + xy = 0$ অথবা $x = y = z$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = 1 - 8x^3$

$\therefore \frac{7x^2 - 2}{Q(x)} = \frac{7x^2 - 2}{1 - 8x^3} = \frac{7x^2 - 2}{1^3 - (2x)^3} = \frac{7x^2 - 2}{(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)}$

ধরি, $\frac{7x^2 - 2}{(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)} \equiv \frac{A}{1 - 2x} + \frac{Bx + C}{1 + 2x + 4x^2}$ ... ... (i)

উভয়পক্ষকে $(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$7x^2 - 2 \equiv A(1 + 2x + 4x^2) + (Bx + C)(1 - 2x)$

বা, $7x^2 - 2 \equiv A + 2Ax + 4Ax^2 + Bx + C - 2Bx^2 - 2Cx$

বা, $7x^2 - 2 \equiv (4A - 2B)x^2 + (2A + B - 2C)x + A + C$ ... ... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে x^2, x এবং ধ্রুবক পদের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$4A - 2B = 7$ ... ... (iii)

$2A + B - 2C = 0$ ... ... (iv)

$\therefore A + C = -2$ ... ... (v)

(iv) + 2 × (v) করে পাই,

$2A + B - 2C + 2A + 2C = 0 - 4$

বা, $4A + B = -4$ ... ... (vi)

(iii) – (vi) করে পাই,

$4A - 2B - 4A - B = 7 - (-4)$

বা, $-3B = 11$

$\therefore B = -\frac{11}{3}$

B এর মান (vi) নং এ বসিয়ে পাই,

$4A - \frac{11}{3} = -4$

বা, $4A = \frac{11}{3} - 4$

বা, $4A = \frac{11 - 12}{3}$

$\therefore A = -\frac{1}{12}$

A এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই,

$-\frac{1}{12} + C = -2$

$\therefore C = \frac{1}{12} - 2 = \frac{1 - 24}{12} = -\frac{23}{12}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{7x^2 - 2}{(1 + 2x)(1 + 2x + 4x^2)} \equiv \frac{-\frac{1}{12}}{1 - 2x} + \frac{-\frac{11}{3}x - \frac{23}{12}}{1 + 2x + 4x^2}$

$= \frac{1}{12(2x - 1)} + \frac{\frac{-44x - 23}{12}}{1 + 2x + 4x^2}$

$= \frac{1}{12(2x - 1)} + \frac{(-44x - 23)}{12(1 + 2x + 4x^2)}$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ (i) 3(1 + 11 + 111 + ...).

(ii) $a + ap + ap^2 + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা।

ক. $7x - 1 + 2x^2 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং ধারার ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $a = p = \frac{1}{2x + 3}$ হলে, x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $7x - 1 + 2x^2 = 0$

বা, $2x^2 + 7x - 1 = 0$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = 7$ এবং $c = -1$

∴ সমীকরণের নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$
$= 7^2 - 4 \times 2 \times (-1)$
$= 49 + 8$
$= 57$ **(Ans.)**

খ মনে করি, (i) নং ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n

∴ $S_n = 3(1 + 11 + 111 + \dots \dots + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}(9 + 99 + 999 + \dots \dots + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots \dots + n$ তম পদ}

$= \frac{3}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \dots \dots + n$ তম পদ) $- (1 + 1 + 1 + \dots \dots + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}\left\{\frac{10.(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right\}$

$= \frac{30}{81}(10^n - 1) - \frac{3n}{9}$

$= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

অতএব, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$ **(Ans.)**

গ এখানে, প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটি $= a + ap + ap^2 + \dots \dots$

$a = p = \frac{1}{2x + 3}$ হলে ধারাটি,

$\frac{1}{2x + 3} + \frac{1}{(2x + 3)^2} + \frac{1}{(2x + 3)^3} + \dots \dots$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2x + 3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(2x+3)^2}}{\frac{1}{2x+3}} = \frac{1}{2x + 3}$

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{2x + 3}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{2x + 3} < 1$ হয়।

$\frac{1}{2x + 3} < 1$

বা, $2x + 3 > 1$

বা, $2x > 1 - 3$

বা, $2x > -2$

∴ $x > -1$

আবার,

$\frac{1}{2x + 3} > -1$

বা, $-(2x + 3) > 1$

বা, $2x + 3 < -1$

বা, $2x < -1 - 3$

বা, $2x < -4$

বা, $x < -2$

∴ $x > -1$ অথবা, $x < -2$ হলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$= \frac{\frac{1}{2x+3}}{1 - \frac{1}{2x+3}}$

$= \frac{\frac{1}{2x+3}}{\frac{2x+3-1}{2x+3}}$

$= \frac{1}{2x+3} \times \frac{2x+3}{2x+2}$

$= \frac{1}{2(x+1)}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ (i) $A = \left(y^2 + \frac{p}{y^2}\right)^6$.

(ii) $f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$.

ক. $8^{2x} = 2^{x+1}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে y মুক্ত পদের মান 14580 হলে p এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং হতে $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $8^{2x} = 2^{x+1}$

বা, $(2^3)^{2x} = 2^{x+1}$

বা, $2^{6x} = 2^{x+1}$

বা, $6x = x + 1$

বা, $6x - x = 1$

বা, $5x = 1$

∴ $x = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \left(y^2 + \frac{p}{y^2}\right)^6$

$= \binom{6}{0}(y^2)^6 + \binom{6}{1}(y^2)^5.\frac{p}{y^2} + \binom{6}{2}(y^2)^4.\left(\frac{p}{y^2}\right)^2 + \binom{6}{3}(y^2)^3\left(\frac{p}{y^2}\right)^3 + \dots \dots$

$= y^{12} + 6.y^{10}.\frac{p}{y^2} + 15y^8.\frac{p^2}{y^4} + 20y^6.\frac{p^3}{y^6} + \dots \dots$

$= y^{12} + 6py^8 + 15y^4p^2 + 20p^3 + \dots \dots$

y মুক্ত পদের মান = 14580

প্রশ্নমতে, $20p^3 = 14580$

বা, $p^3 = \frac{14580}{20}$

বা, $p^3 = 729$

বা, $p^3 = 9^3$

∴ $p = 9$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

∴ $\frac{7 + x}{7 - x} > 0$ যদি (i) $7 + x > 0$ এবং $7 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $7 + x < 0$ এবং $7 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -7$ এবং $-x > -7$ ∴ $x < 7$

∴ ডোমেন = $\{x : -7 < x\}$ এবং $\{x : x < 7\}$
$= (-7, \infty) \cap (-\infty, 7)$
$= (-7, 7)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -7$ এবং $-x < -7$ ∴ $x > 7$

∴ ডোমেন = $\{x : x < -7\} \cap \{x : x > 7\} = \varnothing$

∴ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$ **(Ans.)**

রেঞ্জ নির্ণয় : ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

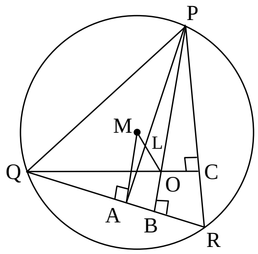
বা, $e^y = \frac{7 + x}{7 - x}$ বা, $7 + x = 7e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 7(e^y - 1)$ বা, $x = \frac{7(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৪ নিচের চিত্রে ΔPQR এর পরিকেন্দ্র M এবং $AQ = AR$।



ক. একটি ঘনকের কর্ণ $3\sqrt{3}$ সে.মি. হলে, এর আয়তন নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PL = 2AL$. ৪

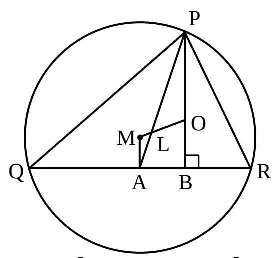
গ. $\angle R$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $QR.BR = PR.CR$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ঘনকের কর্ণ $\sqrt{3}a = 3\sqrt{3}$ বা, $a = 3$ সেমি

$\therefore$ ঘনকের আয়তন, $a^3 = 3^3 = 27$ ঘন সেমি **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔPQR এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র M এবং PA একটি মধ্যমা। লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র M এর সংযোগ রেখা PA মধ্যমাকে L বিন্দুতে ছেদ করেছে।

M, A যোগ করলে MA রেখা QR এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $PL = 2AL$।

প্রমাণ : ΔPQR এর লম্ববিন্দু O থেকে P শীর্ষের দূরত্ব OP এবং পরিকেন্দ্র M থেকে P শীর্ষের বিপরীত বাহু QR এর দূরত্ব MA।

$\therefore OP = 2MA$ ... ... (i)

এখন যেহেতু PB ও MA উভয়ই QR এর উপর লম্ব সেহেতু $PB \parallel MA$। এখন $PB \parallel MA$ এবং PA এদের ছেদক। সুতরাং একান্তর কোণ হওয়ায় $\angle APB = \angle PAM$. অর্থাৎ, $\angle OPL = \angle MAL$।

এখন ΔPLO এবং ΔALM এর মধ্যে

$\angle PLO = \angle ALM$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OPL = \angle MAL$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle POL$ = অবশিষ্ট $\angle AML$

$\therefore \Delta PLO$ এবং ΔALM সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{PL}{AL} = \frac{OP}{MA}$ অর্থাৎ, $\frac{PL}{AL} = \frac{2MA}{MA}$ [(i) নং সমীকরণ হতে]

বা, $\frac{PL}{AL} = \frac{2}{1}$ সুতরাং $PL = 2AL$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, ΔPQR-এ

$PB \perp QR$ এবং $QC \perp PR$

ΔPBR ও QCR-এ

$\angle PBR = \angle QCR = 90°$ [দেওয়া আছে]

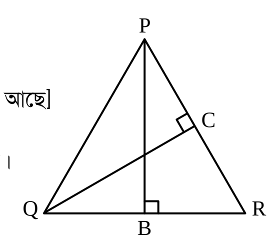
$\angle R$ সাধারণ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore \Delta PBR$ ও ΔQCR সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QR}{PR} = \frac{CR}{BR}$

বা, $QR.BR = PR.CR$

$\therefore$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো। **(Ans.)**



প্রশ্ন ▸ ০৫ A(1, 5), B(r, 2), C(3, – 4) এবং D(6, 0) যথাক্রমে ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

ক. AC রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 34 বর্গ একক হলে r এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ACD ত্রিভুজের AD ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$. ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(1, 5), C(3, – 4)

$\therefore$ AC রেখার ঢাল $= \frac{-4-5}{3-1} = \frac{-9}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(1, 5), B(r, 2), C(3, – 4) এবং D(6, 0)

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & r & 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & -4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(2 - 4r + 0 + 30) - (5r + 6 - 24 + 0)\}$

$= \frac{1}{2}(32 - 4r - 5r + 18)$

$= \frac{1}{2}(50 - 9r)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}(50 - 9r) = 34$

বা, $50 - 9r = 68$

বা, $50 - 68 = 9r$

বা, $-18 = 9r$

$\therefore r = -2$ **(Ans.)**

গ মনে করি, ACD ত্রিভুজের AD ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ \parallel AC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ}$ ... ... (i)

এবং $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$

কিন্তু $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DP}$

[$\because$ P ও Q বিন্দু যথাক্রমে DA এবং DC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore 2\overrightarrow{DQ} - 2\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AC}$

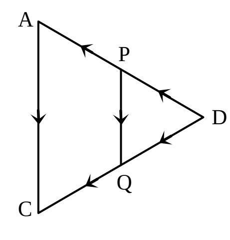
অর্থাৎ, $2\left(\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP}\right) = \overrightarrow{AC}$

$2.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

তাহলে, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$

বা, $PQ = \frac{1}{2}AC$



সুতরাং, PQ এবং AC ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ PQ এবং AC সমান্তরাল।

$\therefore PQ \parallel AC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৬ একটি পঞ্চভুজের পাঁচটি শীর্ষবিন্দু হলো P(– 1, – 1), M(x, y), Q(1, 1), R(2, 7) এবং S(– 3, 2)।

ক. PQ রেখা x অক্ষের সাথে যে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. PM = 2QM হলে দেখাও যে, $3x^2 + 3y^2 - 10x - 10y + 6 = 0$. ৪

গ. PQRS চতুর্ভুজের যে অংশ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P(– 1, – 1) এবং Q(1, 1)

PQ রেখার ঢাল, $m = \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

ধরি, PQ রেখা x অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\theta = m = 1 = \tan 45°$

$\therefore \theta = 45°$

∴ PQ রেখা x অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, P(– 1, – 1), M(x, y) এবং Q(1, 1)

$\therefore PM = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$

এবং $QM = \sqrt{(1-x)^2 + (1+y)^2}$

প্রশ্নমতে, PM = 2QM

বা, $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2 \times \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}$

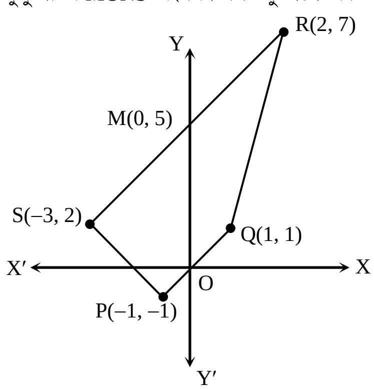
বা, $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4 \times \{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1)\}$

বা, $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 4x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 8$

বা, $4x^2 - x^2 + 4y^2 - y^2 - 8x - 2x - 8y - 2y + 8 - 2 = 0$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 10x - 10y + 6 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ PQRS চতুর্ভুজটির MONS অংশ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।



এখানে, RS রেখার সমীকরণ, $\frac{x-2}{2+3} = \frac{y-7}{7-2}$

বা, $\frac{x-2}{5} = \frac{y-7}{5}$

$\therefore x - y + 5 = 0$ ... ... (i)

(i) নং রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার ভুজ 0 হবে।

অতএব, 0 – y + 5 = 0 বা, y = 5

∴ M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 5)

আবার, PQ রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1+1} = \frac{y-1}{1+1}$

বা, x – 1 = y – 1

∴ y = x ... ... (ii)

(ii) নং রেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি 0 হবে।

∴ x = 0

∴ O বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

আবার, PS রেখার সমীকরণ, $\frac{x+3}{-3+1} = \frac{y-2}{2+1}$

বা, $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{3}$

বা, 3x + 9 = – 2y + 4

∴ 3x + 2y + 5 = 0 ... ... (iii)

(iii) নং রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি 0 হবে।

∴ 3x + 2.0 + 5 = 0

বা, 3x = – 5

$\therefore x = -\frac{5}{3}$

∴ N বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

∴ প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার দিকে নিয়ে MONS অংশের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left|0 + 0 - \frac{10}{3} - 15 - 0 + 0 + 0 - 0\right|$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{10+45}{3}$$

$= \frac{55}{6}$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $P = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$ এবং $R = \tan\alpha + \sec\alpha$

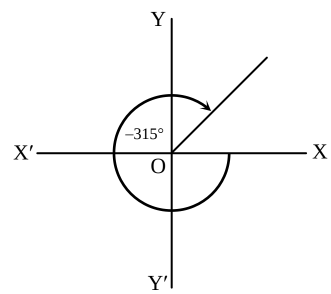
ক. – 315° কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত চিত্রসহ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P = \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$. ৪

গ. যদি $R = \sqrt{3}$ এবং $0 < \alpha < 2\pi$ হয়, তবে α এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক



∴ – 315° কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$$P = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$$

$$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$$

$$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A + (\cot A + \operatorname{cosec} A)(\cot A - \operatorname{cosec} A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$$

$$= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A)(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)}$$

$$= \cot A + \operatorname{cosec} A$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1 - \cos^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{(1+\cos A)(1-\cos A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sec A}}{1 - \frac{1}{\sec A}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sec A + 1}{\sec A}}{\frac{\sec A - 1}{\sec A}}} = \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$$

$\therefore P = \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $R = \tan\alpha + \sec\alpha$

$R = \sqrt{3}$ হলে,

$\therefore \tan\alpha + \sec\alpha = \sqrt{3}$

বা, $\sec\alpha = \sqrt{3} - \tan\alpha$

বা, $\sec^2\alpha = (\sqrt{3} - \tan\alpha)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\alpha = 3 - 2\sqrt{3}\tan\alpha + \tan^2\alpha$

বা, $2\sqrt{3}\tan\alpha = 2$

বা, $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $[\because 0 \le \alpha \le 2\pi]$

$\tan\alpha$ ১ম ও ৩য় চতুর্ভাগে ধনাত্মক,

১ম চতুর্ভাগে,

বা, $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

৩য় চতুর্ভাগে,

$\tan\alpha = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\alpha = \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6}$

এখন, $\tan\alpha = \frac{\pi}{6}$ হলে,

$\tan\alpha + \sec\alpha$

$= \tan\frac{\pi}{6} + \sec\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

এবং $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ হলে,

$\tan\frac{7\pi}{6} + \sec\frac{7\pi}{6}$

$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sec\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{6} - \sec\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ একটি ঝুড়িতে $2x$ টি লাল, $(x + 6)$টি সাদা ও $(x + 3)$টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হল।

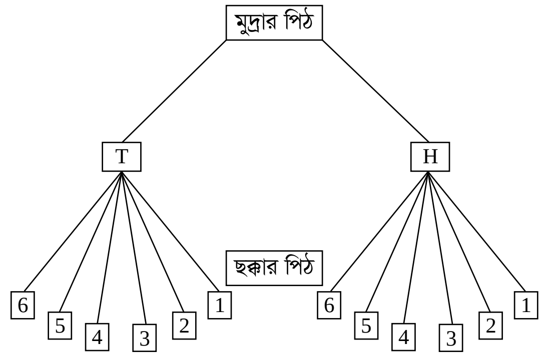
ক. 1টি মুদ্রা ও 1টি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree তৈরি কর। ২

খ. $x = 3$ হলে মার্বেলটি কালো অথবা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. $x = 4$ হলে যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয়, তবে দেখাও যে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা সবগুলো মার্বেল লাল হওয়ার সম্ভাবনার তিন গুণ। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree নিম্নে দেখানো হলো :



$\therefore$ নমুনা ক্ষেত্রটি হবে : {H1, T1, H2, T2, H3, T3, H4, T4, H5, T5, H6, T6} **(Ans.)**

খ $x = 3$ হলে,

লাল মার্বেল, $2x = 2 \times 3 = 6$টি

সাদা মার্বেল, $(x + 6) = 3 + 6 = 9$টি

কালো মার্বেল, $(x + 3) = 3 + 3 = 6$টি

মোট মার্বেল $= 6 + 9 + 6 = 21$টি

দৈবভাবে একটি মার্বেল নেওয়া হলে কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{21}$

এবং সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{9}{21}$

$\therefore$ মার্বেলটি কালো অথবা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{21} + \frac{9}{21}$

$= \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ **(Ans.)**

গ $x = 4$ হলে

লাল মার্বেল $= 2 \times 4 = 8$টি

সাদা মার্বেল $= 4 + 6 = 10$টি

কালো মার্বেল $= 4 + 3 = 7$টি

$\therefore$ কালো মার্বেল $= 8 + 10 + 7 = 25$টি

$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হলে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} \times \frac{7}{22} = \frac{21}{1265}$

এবং সবগুলো মার্বেল লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{25} \times \frac{7}{24} \times \frac{6}{23} \times \frac{5}{22}$

$= \frac{7}{1265}$

$\therefore$ সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{21}{1265}$

$= 3 \times \frac{7}{1265}$

$= 3 \times$ লাল হওয়ার সম্ভাবনা

$\therefore$ সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা সবগুলো মার্বেল লাল হওয়ার সম্ভাবনার তিন গুণ। **(দেখানো হলো)**

ঢাকা বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $2^{y+3} + 2^{y+1} = 320$ **হলে** $y = ?$
ⓚ 0 ⓛ 1 ⓖ 4 ⓘ 5

২. $x + 3y + 5 = 0$ **এবং** $mx + y + 6 = 0$ **রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে m এর মান কত?**
ⓚ -3 ⓛ $-\frac{1}{3}$ ⓖ $\frac{1}{3}$ ⓘ 3

৩. $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{2}{3}$ **হলে x এর মান কত?**
ⓚ 8 ⓛ 4 ⓖ $2\sqrt{2}$ ⓘ 2

৪. $(1 + y)^{15}$ **এর বিস্তৃতিতে 7ম ও 8ম পদ দুটি সমান হলে y এর মান কত?**
ⓚ $-\frac{7}{9}$ ⓛ $\frac{7}{9}$ ⓖ $\frac{8}{9}$ ⓘ $\frac{9}{7}$

৫. $x - 5y + 10 = 0$ **এবং** $5x - 2y + 12 = 0$ **রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল কত?**
ⓚ $\frac{25}{2}$ ⓛ $\frac{1}{2}$ ⓖ $-\frac{1}{2}$ ⓘ $-\frac{25}{2}$

৬. **একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে 4 না উঠার সম্ভাবনা কত?**
ⓚ $\frac{1}{6}$ ⓛ $\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{2}{3}$ ⓘ $\frac{5}{6}$

৭. **খুলনা শহরে জুন মাসে 15 দিন বৃষ্টি হয়েছে। 5 জুন বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কত?**
ⓚ $\frac{1}{5}$ ⓛ $\frac{1}{3}$ ⓖ $\frac{15}{31}$ ⓘ $\frac{1}{2}$

৮. **A(– 1, 2), B(2, 5) এবং C(1, 3) শীর্ষবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?**
ⓚ 25 ⓛ $\frac{25}{2}$ ⓖ 3 ⓘ $\frac{3}{2}$

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ৯ ও ১০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$

৯. **ধারাটির অষ্টম পদ কত?**
ⓚ $-\frac{1}{256}$ ⓛ $-\frac{1}{128}$ ⓖ $\frac{1}{256}$ ⓘ $\frac{1}{128}$

১০. **ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?**
ⓚ $\frac{1}{4}$ ⓛ $\frac{1}{3}$ ⓖ $\frac{1}{2}$ ⓘ 1

১১. $-1 < \frac{1}{x+1} < 1$ **হলে x এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?**
ⓚ $x > -2$ অথবা $x > 0$ ⓛ $x < -2$ অথবা $x < 0$
ⓖ $x < -2$ অথবা $x > 0$ ⓘ $x > -2$ অথবা $x < 0$

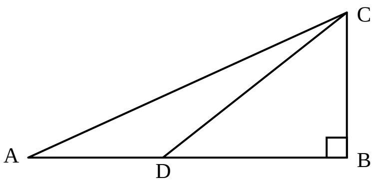
১২. $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{3}$ **এবং** $\cos\theta > 0$ **হলে–**
i. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ ii. $\sec\theta = \frac{5}{4}$ iii. $\cot^2\theta = \frac{16}{25}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৩. $\sin A = \frac{1}{2}$ **এবং** $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **হলে** $\tan(A + B) = $ **কত?**
ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓛ 1 ⓖ $\sqrt{2}$ ⓘ $\sqrt{3}$

১৪. $f(x) = \log_a x$ **যখন** $0 < a < 1$. **ডোমেন কত?**
ⓚ $(0, \infty)$ ⓛ $(-\infty, 0)$ ⓖ $(\infty, 0)$ ⓘ $(-\infty, \infty)$

১৫. **(3, 4) বিন্দুগামী ও – 3 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ কোনটি?**
ⓚ $y + 3x = 5$ ⓛ $y - 3x - 5 = 0$
ⓖ $y + 3x - 13 = 0$ ⓘ $y - 3x + 13 = 0$

১৬.



AB এর উপরে CD এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?
ⓚ AD ⓛ BD ⓖ AC ⓘ BC

১৭. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{9}{11}, \frac{8}{9}, \ldots\ldots$ **অনুক্রমটির সাধারণ পদ কোনটি?**
ⓚ $\frac{n^2}{2n^2+1}$ ⓛ $\frac{n^2}{n^2+2}$ ⓖ $\frac{3n^2}{n^2+8}$ ⓘ $\frac{n^3}{2n^2+1}$

১৮. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ **হলে,**
i. $0! = 0$ ii. $\binom{5}{2} = 10$ iii. $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৯. **তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপের ক্ষেত্রে–**
i. তিনটি H পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{8}$
ii. বড় জোড় দুটি T পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$
iii. TTT একটি নমুনা বিন্দু
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

২০. $\frac{4x-3}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ **হলে, (A, B) এর মান কত?**
ⓚ (1, 3) ⓛ (3, 1) ⓖ (1, – 3) ⓘ (– 1, 3)

২১. $2x^3 + x^2 + bx + 18$ **বহুপদীর একটি উৎপাদক** $x + 2$ **হলে, b এর মান কত?**
ⓚ – 19 ⓛ – 3 ⓖ 3 ⓘ 19

২২. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ **রাশিটি–**
i. সমমাত্রিক ii. চক্রক্রমিক iii. প্রতিসম
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

২৩. **সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 6, 7 এবং 8 একক হলে অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?**
ⓚ 9.00 ⓛ 9.97 (প্রায়)
ⓖ 14.28 (প্রায়) ⓘ 14.95 (প্রায়)

২৪. $5x + 4y = 9$ **সমীকরণের ঢাল নির্ণয় কর।**
ⓚ $\frac{9}{4}$ ⓛ $\frac{5}{4}$ ⓖ $-\frac{5}{4}$ ⓘ $-\frac{9}{4}$

২৫. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 একক হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?**
ⓚ 25π ⓛ 100π ⓖ 200π ⓘ 400π

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

ঢাকা বোর্ড-২০২৩

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

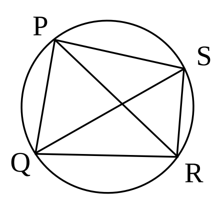
১। (i) $A = p^4(q-r) + q^4(r-p) + r^4(p-q)$.
(ii) $B = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
ক. $5m^3 - 11m^2 - 3m + 4$ কে $(m + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২
খ. A এর উৎপাদকগুলো নির্ণয় কর। ৪
গ. $\frac{x}{B}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। (i) $X = 8 + 88 + 888 + ...$
(ii) $Y = 5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} + ...$
ক. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$ .... অনুক্রমের ৯ম পদ নির্ণয় কর। ২
খ. X ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪
গ. Y ধারাটির সাধারণ পদ নির্ণয় করে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ৪

৩। $p\left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এবং $q = (2 - x)(3 + ax)^3$ দুইটি দ্বিপদী বিস্তৃতি।
ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $(3 - y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২
খ. যদি p এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগ সমান হয়, তাহলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪
গ. q এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগের মান যদি 45 হয়, তাহলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

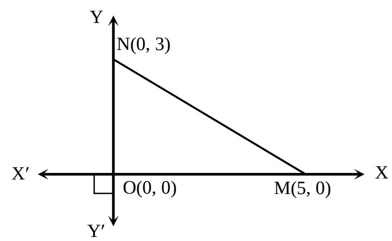
৪।



চিত্রে, PQRS একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ।
ক. ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B = 90°$, AB = 12 সে.মি. এবং AC = 13 সে.মি. হলে, BC এর মান কত? ২
খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + PS.QR. ৪
গ. যদি QA এবং SB যথাক্রমে PS ও PQ এর উপর লম্ব হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\Delta PQS : \Delta PAB = PQ^2 : PA^2$. ৪

৫। A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু।
ক. (8, 4) এবং (– 4, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২
খ. ΔABD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪
গ. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৬। A(3, 4), B(2t, 5), C(6, t), P(6, 3) এবং Q(2, 9) পাঁচটি বিন্দু।



ক. OMN ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২
খ. ছক কাগজে APQ ত্রিভুজটি আঁক এবং প্রমাণ কর যে, এটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। ৪
গ. ΔABC এর ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হলে, t এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। (i) $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ এবং $\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = q$.
(ii) $a\cos\theta - b\sin\theta = c$
ক. $\sin^2 15° + \sin^2 75°$ এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $q(p^2 - 1) = 2p$. ৪
গ. যদি $a = b = c = 1$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৮। (i) একটি ঝুড়িতে 10টি নীল, 12টি সবুজ ও 8টি হলুদ বল আছে।
(ii) একজন লোকের রাজশাহী হতে ঢাকায় ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$ এবং ঢাকা হতে কুমিল্লায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$।
ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২
খ. দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হলে, বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা এবং হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪
গ. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	ক	৩	ঘ	৪	খ	৫	খ	৬	ঘ	৭	ঘ	৮	ঘ	৯	ক	১০	খ	১১	গ	১২	ক	১৩	ঘ
	১৪	ক	১৫	গ	১৬	খ	১৭	খ	১৮	গ	১৯	খ	২০	ক	২১	গ	২২	ক	২৩	খ	২৪	গ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▸ ০১ (i) $A = p^4(q-r) + q^4(r-p) + r^4(p-q)$.
(ii) $B = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

ক. $5m^3 - 11m^2 - 3m + 4$ কে $(m + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. A এর উৎপাদকগুলো নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x}{B}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(m) = 5m^3 - 11m^2 - 3m + 4$

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $f(m)$ কে $(m + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-2)$.

$\therefore f(-2) = 5(-2)^3 - 11(-2)^2 - 3(-2) + 4$
$= -40 - 44 + 6 + 4 = -84 + 10 = -74$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ -74 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = p^4(q-r) + q^4(r-p) + r^4 + (p-q)$

$= p^4(q-r) + q^4r - pq^4 + pr^4 - qr^4$
$= p^4(q-r) + qr(q^3 - r^3) - p(q^4 - r^4)$
$= (q-r)\{p^4 + qr(q^2 + qr + r^2) - p(q+r)(q^2 + r^2)\}$
$= (q-r)\{p^4 + qr(q^2 + qr + r^2) - p(q^3 + qr^2 + q^2r + r^3)\}$
$= (q-r)\{p^4 + q^3r + q^2r^2 + qr^3 - pq^3 - pqr^2 - pq^2r - pr^3\}$
$= (q-r)\{p(p^3 - q^3) - r^3(p-q) - q^2r(p-q) - qr^2(p-q)\}$
$= (q-r)(p-q)\{p(p^2 + pq + q^2) - r^3 - q^2r - qr^2\}$
$= (q-r)(p-q)(p^3 + p^2q + pq^2 - r^3 - q^2r - qr^2)$
$= (q-r)(p-q)\{-q^2(r-p) - q(r^2 - p^2) - (r^3 - p^3)\}$
$= (q-r)(p-q)(r-p)\{-q^2 - q(r+p) - (r^2 + rp + p^2)\}$
$= (q-r)(p-q)(r-p)\{-q^2 - qr - pq - r^2 - rp - p^2\}$
$= -(p-q)(q-r)(r-p)(p^2 + q^2 + r^2 + pq + qr + rp)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= -(p-q)(q-r)(r-p)(p^2 + q^2 + r^2 + pq + qr + rp)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = x^3 + x^2 - 5x + 3 = x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + x + 3$
$= x^2(x+3) - 2x(x+3) + 1(x+3)$
$= (x+3)(x^2 - 2x + 1) = (x+3)(x-1)^2$

$\therefore \frac{x}{B} = \frac{x}{(x+3)(x-1)^2}$

ধরি, $\frac{x}{(x+3)(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x+3)(x-1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$x \equiv A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$ .... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই, $-3 = 16A + B.0 + C.0$

বা, $16A = -3 \quad \therefore A = -\frac{3}{16}$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = A.0 + B.0 + 4C$

বা, $4C = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{4}$

আবার, (ii) নং হতে, $x = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x+3)$
বা, $x = (A + B)x^2 + (-2A + 2B + C)x + A - 3B + 3C$
উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + B = 0$

বা, $-\frac{3}{16} + B = 0 \quad \therefore B = \frac{3}{16}$

A, B, C এর মান (i) নং বসিয়ে পাই, $\frac{x}{(x+3)(x-1)^2} \equiv \frac{-\frac{3}{16}}{x+3} + \frac{\frac{3}{16}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$

$\therefore \frac{x}{B} = -\frac{3}{16(x+3)} + \frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০২ (i) $X = 8 + 88 + 888 + ...$

(ii) $Y = 5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} + ...$

ক. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$ .... অনুক্রমের ৯ম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. X ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. Y ধারাটির সাধারণ পদ নির্ণয় করে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত অনুক্রম, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$, ...

$= \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$, ...

$= \left(\frac{2}{3}\right)^0, \left(\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, ...\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

অর্থাৎ, অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore$ অনুক্রমটির ৯ম পদ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{9-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$
$= \frac{256}{6561}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $X = 8 + 88 + 888 +$ ....

বা, $X = 8 + 88 + 888 +$ .... n তম পদ

বা, $X = 8(1 + 11 + 111 +$ .... n তম পদ)

বা, $\frac{X}{8} = 1 + 11 + 111 +$ .... n তম পদ

বা, $\frac{9X}{8} = 9 + 99 + 999 +$ ....

বা, $\frac{9X}{8} = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) +$ .....

বা, $\frac{9X}{8} = (10 + 100 + 1000 + ...$ n তম পদ$) - (1 + 1 + 1 + ...$ n তম পদ)

বা, $\frac{9X}{8} = (10 + 10^2 + 10^3 +$ ...... n তম পদ$) - n$

বা, $\frac{9X}{8} = 10.\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n$ বা, $X = \frac{8}{9}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$

$\therefore$ X ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8}{9}n$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $Y = 5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} +$ ....

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অন্তর, $r = \frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ বা n তম পদ $= ar^{n-1} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

যেহেতু, ধারাটির সাধারণ অন্তর, $r = \frac{2}{3}$ অর্থাৎ $|r| < 1$.

সুতরাং, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ Y ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{5}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{1}{3}}$
$= 15$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ $p\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$ এবং $q = (2 - x)(3 + ax)^3$ দুইটি দ্বিপদী বিস্তৃতি।

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $(3 - y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. যদি p এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগ সমান হয়, তাহলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. q এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগের মান যদি 45 হয়, তাহলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে পাই,

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$\therefore \ (3 - y)^5 = 3^5 + 5(3)^4(-y) + 10(3)^3(-y)^2 + 10(3)^2(-y)^3 + 5(3)(-y)^4 + (-y)^5$
$= 243 - 405y + 270y^2 - 90y^3 + 15y^4 - y^5$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p = \left(3+\frac{x}{2}\right)^n$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$p = 3^n + {}^nC_1\, 3^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + {}^nC_2\, 3^{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots +$
${}^nC_7\, 3^{n-7}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + {}^nC_8\, 3^{n-8}\left(\frac{x}{2}\right)^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots$
$= 3^n + {}^nC_1\, 3^{n-1}\frac{x}{2} + {}^nC_2\, 3^{n-2}\frac{x^2}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$
${}^nC_7\, 3^{n-7}\frac{x^7}{2^7} + {}^nC_8\, 3^{n-8}\frac{x^8}{2^8} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2^7}\,{}^nC_7\, 3^{n-7} = \frac{1}{2^8}\,{}^nC_8\, 3^{n-8}$

বা, $\frac{2^8}{2^7} \times \frac{n!}{7!(n-7)(n-8)!} \times 3^{n-7} = \frac{n!}{8 \times 7!\,(n-8)!} \times 3^{n-8}$

বা, $\frac{3^{n-7}}{2^{n-7}} = \frac{3^{n-8}}{8}$ বা, $\frac{3^{n-7}}{n-7} = \frac{3^{n-8}}{16}$

বা, $\frac{3^{n-7}}{3^{n-8}} = \frac{n-7}{16}$ বা, $3^{n-7-n+8} = \frac{n-7}{16}$

বা, $3 = \frac{n-7}{16}$ বা, $n - 7 = 48$

$\therefore n = 55$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $q = (2 - x)(3 + ax)^3$
$= (2 - x)[3^3 + {}^3C_1\, 3^{3-1}(ax)^1 + {}^3C_2\, 3^{3-2}(ax)^2 + {}^3C_3\, 3^{3-3}(ax)^3]$
$= (2 - x)(27 + 27ax + 9a^2x^2 + a^3x^3)$
$= 54 + 54ax + 18a^2x^2 + 2a^3x^3 - 27x - 27ax^2 - 9a^2x^3 - a^3x^4$
$= 54 + 54ax + (18a^2 - 27a)x^2 + 2a^3x^3 - 27x - 9a^2x^3 - a^3x^4$

প্রশ্নমতে, $18a^2 - 27a = 45$

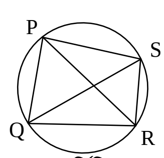
বা, $18a^2 - 27a - 45 = 0$ বা, $2a^2 - 3a - 5 = 0$

বা, $2a^2 - 5a + 2a - 5 = 0$ বা, $a(2a - 5) + 1(2a - 5) = 0$

বা, $(a + 1)(2a - 5) = 0$

$\therefore a = -1, \frac{5}{2}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৪



চিত্রে, PQRS একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ।

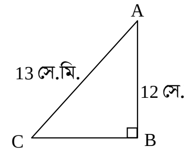
ক. ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B = 90°$, AB = 12 সে.মি. এবং AC = 13 সে.মি. হলে, BC এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + PS.QR. ৪

গ. যদি QA এবং SB যথাক্রমে PS ও PQ এর উপর লম্ব হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\Delta PQS : \Delta PAB = PQ^2 : PA^2$. ৪

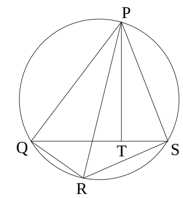
৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B = 90°$, AB = 12 সে.মি. এবং AC = 13 সে.মি.



$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$
$= \sqrt{13^2 - 12^2}$
$= \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25}$
$= 5$ সে.মি. **(Ans.)**

খ এখানে, PQRS একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটি কর্ণ। PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। প্রমাণ করতে হবে যে, PR.QS = PQ.RS + PS.QR



অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$ এর সমান করে $\angle SPT$ আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle QPR = \angle SPT$

বা, $\angle QPR + \angle RPT = \angle SPT + \angle RPT$ [$\angle RPT$ যোগ করে]

$\therefore \angle QPT = \angle RPS$

এখন, ΔPQT ও ΔPRS এর মধ্যে

$\angle QPT = \angle RPS, \angle PQS = \angle PRS$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore \Delta PQT$ ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ $PR \,.\, QT = PQ \,.\, RS$ .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPTS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPT$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = \angle PST$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PTS$

$\therefore \Delta PQR$ ও ΔPTS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$

বা, $PR \,.\, ST = QR \,.\, PS$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

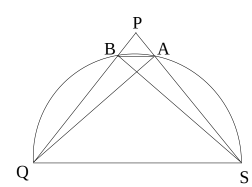
$PR \,.\, QT + PR \,.\, ST = PQ \,.\, RS + QR \,.\, PS$

বা, $PR(QT + ST) = PQ \,.\, RS + QR \,.\, PS$

বা, $PR \,.\, QS = PQ \,.\, RS + QR.PS$ [$\because QT + ST = QS$]

$\therefore PR.QS = PQ.RS + PS.QR$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন :** ΔPQS এর QA ও SB যথাক্রমে SP ও QP এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $\Delta PQS : \Delta PAB = PQ^2 : PA^2$।



অঙ্কন : A, B যোগ করি।

প্রমাণ : QS কে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা A ও B বিন্দু দিয়ে যাবে। কেননা $\angle QAS = \angle QBS = 90°$ এবং উহারা QS চাপের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ QSAB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একবাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।

$\therefore \angle PBA = \angle PSQ$

এবং $\angle PAB = \angle PQS$

ΔPQS ও ΔPAB-এ

$\angle P$ সাধারণ কোণ এবং অপর কোণদ্বয় সমান।

$\therefore$ উহারা সদৃশ।

$\therefore \frac{\Delta PQS}{\Delta PAB} = \frac{PQ^2}{PA^2}$

$\therefore \Delta PQS : \Delta PAB = PQ^2 : PA^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫ A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

ক. (8, 4) এবং (– 4, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ΔABD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$

∴ (8, 4) ও (– 4, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{6-4}{-4-8} = \frac{2}{-12}$

$= -\frac{1}{6}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A, B ও D বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8)।

এখানে, A, B ও D বিন্দু তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করি।

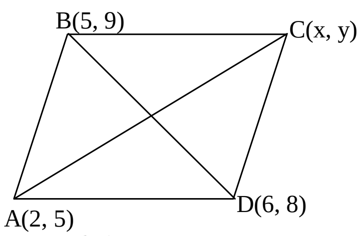
∴ ΔABD-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(18 + 40 + 30 - 25 - 54 - 16)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|-7|$ বর্গ একক

$= \frac{7}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2, 5), B(5, 9), D(6, 8)।



ধরি, রম্বসটির অপর শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক C(x, y)। রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

এখন, AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{2+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{5+6}{2}, \frac{9+8}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$

যেহেতু, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সেহেতু

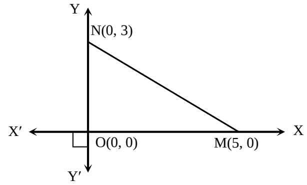
$\frac{2+x}{2} = \frac{11}{2}$ | $\frac{5+y}{2} = \frac{17}{2}$

বা, 2 + x = 11 | বা, 5 + y = 17

∴ x = 9 | ∴ y = 12

∴ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক C(9, 12). **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৬ A(3, 4), B(2t, 5), C(6, t), P(6, 3) এবং Q(2, 9) পাঁচটি বিন্দু।



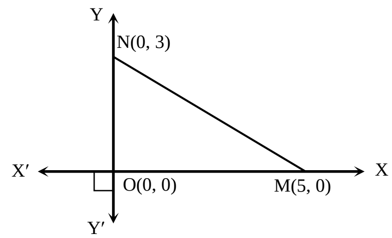
ক. OMN ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. ছক কাগজে APQ ত্রিভুজটি আঁক এবং প্রমাণ কর যে, এটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। ৪

গ. ΔABC এর ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হলে, t এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্র হতে, O(0, 0), M(5, 0) এবং N(0, 3)

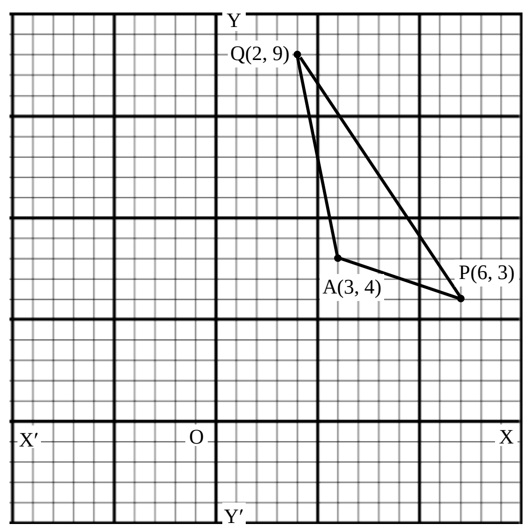
∴ OMN ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|(0 + 15 + 0 - 0 - 0 - 0)|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 15$ বর্গ একক

$= \frac{15}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

খ ছক কাগজে x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে A(3, 4), P(6, 3) ও Q(2, 9) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত APQ ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখানে, $AP = \sqrt{(3-6)^2 + (4-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AQ = \sqrt{(3-2)^2 + (4-9)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

এবং $PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (3-9)^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{16+36}$

$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

এখানে, $AP^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$

$AQ^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$

$PQ^2 = (2\sqrt{13})^2 = 4 \times 13 = 52$

এখানে, $AP^2 + AQ^2 = 10 + 26 = 36 < PQ^2$

∴ ∠PAQ স্থূলকোণ।

∴ ΔAPQ একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। **(প্রমাণিত)**

গ A(3, 4), B(2t, 5) এবং C(6, t) শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত

ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2t & 6 & 3 \\ 4 & 5 & t & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|(15 + 2t^2 + 24 - 8t - 30 - 3t)|$

$= \frac{1}{2}|2t^2 - 11t + 9|$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|2t^2 - 11t + 9| = 19\frac{1}{2}$

বা, $\frac{1}{2}|2t^2 - 11t + 9| = \frac{39}{2}$

বা, $\pm(2t^2 - 11t + 9) = 39$

বা, $2t^2 - 11t + 9 = \pm 39$

হয়, $2t^2 - 11t + 9 = 39$

বা, $2t^2 - 11t - 30 = 0$

বা, $2t^2 - 15t + 4t - 30 = 0$

বা, $t(2t - 15) + 2(2t - 15) = 0$

বা, $(2t - 15)(t + 2) = 0$

$\therefore t = -2, \frac{15}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ (i) $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ এবং $\sec\alpha + \text{cosec}\alpha = q$.
(ii) $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

ক. $\sin^2 15° + \sin^2 75°$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $q(p^2 - 1) = 2p$. ৪

গ. যদি $a = b = c = 1$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin^2 15° + \sin^2 75° = \sin^2(90° - 75°) + \sin^2 75°$

$= \{\sin(90° - 75°)\}^2 + (\sin 75°)^2$

$= (\cos 75°)^2 + (\sin 75°)^2$

$= \sin^2 75° + \cos^2 75°$

$= 1.$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ এবং $\sec\alpha + \text{cosec}\alpha = q$

বামপক্ষ $= q(p^2 - 1)$

$= (\sec\alpha + \text{cosec}\alpha)\{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1\}$

$= \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1)$

$= \left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1)$

$= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \times 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$= 2p =$ ডানপক্ষ

$\therefore q(p^2 - 1) = 2p.$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $1.\cos\theta - 1.\sin\theta = 1$ [$\because a = b = c = 1$]

বা, $\cos\theta - \sin\theta = 1$

বা, $\cos\theta = 1 + \sin\theta$

বা, $(\cos\theta)^2 = (1 + \sin\theta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - \sin^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - \sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta - \sin^2\theta = 0$

বা, $-2\sin^2\theta - 2\sin\theta = 0$

বা, $\sin^2\theta + \sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta + 1) = 0$

সুতরাং, $\sin\theta = 0$

$\sin\theta = \sin 0 = \sin 2\pi$

$\therefore \theta = 0, 2\pi$

অথবা, $\sin\theta + 1 = 0$

বা, $\sin\theta = -1$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{3\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় $\theta = 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) একটি ঝুড়িতে 10টি নীল, 12টি সবুজ ও 8টি হলুদ বল আছে।
(ii) একজন লোকের রাজশাহী হতে ঢাকায় ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$ এবং ঢাকা হতে কুমিল্লায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হলে, বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা এবং হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র,
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 6টি।
ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা = 3টি। যথা : 2, 3, 5.

$\therefore$ ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি ঝুড়িতে 10টি নীল, 12টি সবুজ ও 8টি হলুদ বল আছে।

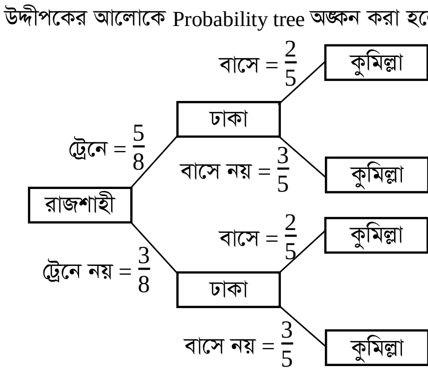
এখানে, মোট বল সংখ্যা = 10 + 12 + 8 = 30টি

$\therefore$ বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{12}{30} = \frac{5}{2}$. **(Ans.)**

বলটি হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা = 1 – (হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা)

$= 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$. **(Ans.)**

গ নিম্নে উদ্দীপকের আলোকে Probability tree অঙ্কন করা হলো :



$\therefore$ লোকটির ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$ **(Ans.)**

রাজশাহী বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড : 1 2 6**

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\left(\frac{25\pi}{2}+\theta\right)$ কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?
ক) ১ম খ) ২য় গ) ৩য় ঘ) ৪র্থ

২. y = 3 সরলরেখাটির দ্বারা y অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
ক) (3, 0) খ) (0, 3) গ) (– 3, 0) ঘ) (0, – 3)

৩. 3x – 2y – 7 = 0 একটি সরলরেখার সমীকরণ হলে—
i. রেখাটির ঢাল = $\frac{3}{2}$
ii. রেখাটি (3, 1) বিন্দুগামী
iii. রেখাটি দ্বারা y অক্ষের ছেদক 7 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৪. x-অক্ষ হতে $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$ বিন্দুর দূরত্ব কত?
ক) $\frac{5}{2}$ খ) $\frac{7}{3}$ গ) $\frac{35}{6}$ ঘ) $\frac{15}{14}$

৫. একটি থলেতে ৪টি লাল বল ও ৫টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে একটি বল তুলে আনা হলো। বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক) $\frac{8}{13}$ খ) $\frac{5}{13}$ গ) $\frac{13}{13}$ ঘ) 0

৬. 2টি ছক্কা ও 2টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে তাদের নমুনা বিন্দুর সংখ্যা কত?
ক) 144টি খ) 72টি গ) 36টি ঘ) 24টি

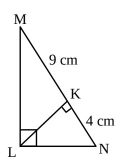
৭. $2x^5 - 4x^3 + 14x^7 + x - 5$ রাশিটির ধ্রুবপদ ও মুখ্য সহগের সমষ্টি কত?
ক) – 3 খ) 2 গ) 9 ঘ) 19

৮. $\frac{x+4}{x(x+2)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ নিচের কোনটি?
ক) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x(x+2)}$ খ) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}$ গ) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}$ ঘ) $\frac{2}{x}-\frac{1}{x+2}$

৯. $x^3 + y^3 + z^3$ একটি—
i. প্রতিসম রাশি
ii. সমমাত্রিক বহুপদী
iii. চক্র-ক্রমিক রাশি
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

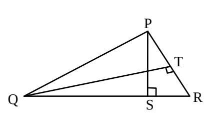
১০. সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 সে.মি. হলে, এর পরিব্যাসার্ধ কত সে.মি.?
ক) $\sqrt{3}$ সে.মি. খ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ সে.মি. গ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ সে.মি. ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ সে.মি.

১১.



LK এর মান কত?
ক) 36 cm খ) 13 cm গ) 6 cm ঘ) 5 cm

১২.



QR = 25cm, SR = 6cm, TR = 5cm হলে, PR = কত?
ক) 30 cm খ) 36 cm গ) 125 cm ঘ) 150 cm

১৩. $\log_{\sqrt{27}} x = 4$ হলে, x এর মান কত?
ক) $\sqrt{188}$ খ) $4\sqrt{27}$ গ) 27 ঘ) 729

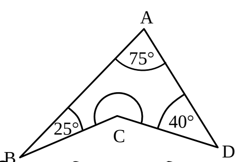
১৪. $5.0\dot{7}\dot{5}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ নিচের কোনটি?
ক) $\frac{5075}{99}$ খ) $\frac{1675}{33}$ গ) $\frac{1015}{198}$ ঘ) $\frac{335}{66}$

১৫. 0.032 + 0.00032 + 0.0000032 + ...
i. ধারাটি গুণোত্তর ধারা
ii. ধারাটির সাধারণ অনুপাত 0.01
iii. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{32}{99}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১৬. $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^4$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা কত?
ক) 5 খ) 7 গ) 12 ঘ) 13

১৭. $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কোনটি?
ক) $(-1)^3\,{}^6C_3$ খ) $(-1)^4\,{}^6C_4$ গ) ${}^6C_3$ ঘ) $-{}^6C_4$

১৮.



চিত্রে ∠C এর বৃত্তীয় মান নিচের কোনটি?
ক) $\frac{5\pi}{9}$ খ) $\frac{7\pi}{9}$ গ) $\frac{11\pi}{9}$ ঘ) $\frac{13\pi}{9}$

১৯. নিচের কোনটি 3x + 4y – 5 = 0 সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা?
ক) 3x – 4y – 5 = 0 খ) 6x – 8y – 5 = 0
গ) 6x + 8y – 5 = 0 ঘ) – 3x + 4y – 5 = 0

□ নিচের তথ্যের আলোকে ২০ ও ২১নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \log_{10}3x$

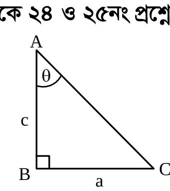
২০. f(x) এর ডোমেন কত?
ক) (– ∞, ∞) খ) (– ∞, 0) গ) (0, ∞) ঘ) (3, ∞)

২১. f(x) এর রেঞ্জ কত?
ক) (– ∞, ∞) খ) (– ∞, 0) গ) (0, ∞) ঘ) (3, ∞)

২২. নিচের কোন সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী?
ক) 3x – 5 = 0 খ) 3y – 5 = 0
গ) 3x + 5y = 0 ঘ) 3x + 5y – 5 = 0

২৩. 5x + 6y – 30 = 0 সরলরেখা ও অক্ষদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
ক) 30 বর্গ একক খ) 15 বর্গ একক
গ) 7.5 বর্গ একক ঘ) 3.5 বর্গ একক

□ নিচের চিত্রের আলোকে ২৪ ও ২৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



২৪. চিত্রে $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে c ও a এর সম্পর্ক কোনটি?
ক) c > a খ) c < a গ) c ≥ a ঘ) c ≤ a

২৫. sinθ + cosθ এর মান নিচের কোনটি?
ক) $\frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}}$ খ) $\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a+c}$ গ) $\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$ ঘ) $\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$

■ খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

রাজশাহী বোর্ড-২০২৩

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $f(x) = x^2 - 25$ এবং $g(y) = y^3 - y^2 - 14y + 24$.

ক. g(y) এর মাত্রা ও ধ্রুব পদের অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. g(y) = 0 হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

২। (i) $\left(k - \frac{1}{3}x\right)^5 = m - 135x + nx^2 + \dots\dots$

(ii) একটি গুণোত্তর ধারার তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি $\frac{21}{2}$ এবং গুণফল 8।

ক. $(1 - 2x)^4$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতি কর। ২

খ. (i) নং এর সাহায্যে k, m ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. গুণোত্তর ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর। ৪

৩। $C = \frac{\log_k(y+5)}{\log_k y}$ এবং $D = p - 3 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}$.

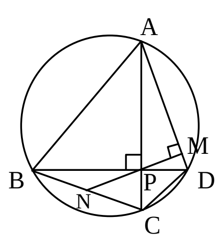
ক. $25^a = 125^b$ হলে $\frac{3a}{2b}$ নির্ণয় কর। ২

খ. D = 0 হলে দেখাও যে, $p^3 - 9p^2 + 12p = 12$. ৪

গ. C = 2 হলে, প্রমাণ কর যে, $y = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$. ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



ক. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের পরিধি 20 সে.মি. হলে, ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BN = CN. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PM^2 = AM.DM$. ৪

৫। A(– 4, 4), B(6, 4), C(6, – 7) এবং D(4, – 7) বিন্দু চারটি একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

ক. দেখাও যে, (3, – 5) এবং (6, 4) বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬। P(– 6, 5), Q(– 11, – 6), R(7, – 2), S(8, h) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু যেখানে $h > 0$.

ক. (– 5, – 3) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. T(x, y) বিন্দুটি P ও Q বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, 5x + 11y + 48 = 0. ৪

গ. PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল, ΔPQR এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে, h এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $M = \sin\theta$ এবং $N = \cos\theta$.

ক. $\cos\left(\frac{-25\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $12M^2 + 23N = 22$ এবং $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{2}{N^2} + \frac{M^2}{N^2} = 3$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (i) একটি মুদ্রা এবং একটি ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) 22টি টিকেটে 31 হতে 52 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে। একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. সেপ্টেম্বর মাসে কোনো শহরে 12 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে 5 সেপ্টেম্বর বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং এর আলোকে সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ৪

গ. নির্বাচিত টিকেটের নম্বরটি জোড় অথবা 9 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	খ	২	খ	৩	ক	৪	খ	৫	ঘ	৬	ক	৭	গ	৮	ঘ	৯	ঘ	১০	গ	১১	গ	১২	ক	১৩	ঘ
	১৪	ঘ	১৫	ক	১৬	ঘ	১৭	ক	১৮	গ	১৯	গ	২০	গ	২১	ক	২২	গ	২৩	খ	২৪	খ	২৫	ক		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $f(x) = x^2 - 25$ এবং $g(y) = y^3 - y^2 - 14y + 24$.

ক. $g(y)$ এর মাত্রা ও ধ্রুব পদের অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $g(y) = 0$ হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক $g(y) = y^3 - y^2 - 14y + 24$

এখানে, y চলকের মাত্রা 3 এবং ধ্রুব পদ 24

সুতরাং, $g(y)$ এর মাত্রা ও ধ্রুব পদের অনুপাত $3 : 24 = 1 : 8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$g(y) = y^3 - y^2 - 14y + 24$

এখন, $g(y) = 0$ হলে, $y^3 - y^2 - 14y + 24 = 0$

বা, $y^3 - 2y^2 + y^2 - 2y - 12y + 24 = 0$

বা, $y^2(y - 2) + y(y - 2) - 12(y - 2) = 0$

বা, $(y - 2)(y^2 + y - 12) = 0$

বা, $(y - 2)(y^2 + 4y - 3y - 12) = 0$

বা, $(y - 2)\{y(y + 4) - 3(y + 4)\} = 0$

বা, $(y - 2)(y + 4)(y - 3) = 0$

$\therefore y = 2, 3, -4$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 25$

$= x^2 - 5^2$

$= (x + 5)(x - 5)$

$\therefore \frac{x^2}{f(x)} = \frac{x^2}{(x + 5)(x - 5)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x + 5)(x - 5)} \equiv 1 + \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 5}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 5)(x - 5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv (x + 5)(x - 5) + A(x - 5) + B(x + 5)$ ... ... (ii)

(ii) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 5, -5$ বসিয়ে পাই,

$25 = 10B \qquad \therefore B = \frac{5}{2}$

$25 = -10A \qquad \therefore A = -\frac{5}{2}$

এখন, A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{(x + 5)(x - 5)} \equiv 1 + \frac{-\frac{5}{2}}{x + 5} + \frac{\frac{5}{2}}{x - 5}$

$\therefore \frac{x^2}{f(x)} \equiv 1 - \frac{5}{2(x + 5)} + \frac{5}{2(x - 5)}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ (i) $\left(k - \frac{1}{3}x\right)^5 = m - 135x + nx^2 + \ldots \ldots$

(ii) একটি গুণোত্তর ধারার তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি $\frac{21}{2}$ এবং গুণফল 8।

ক. $(1 - 2x)^4$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতি কর। ২

খ. (i) নং এর সাহায্যে k, m ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. গুণোত্তর ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাই,

n = 0					1				
n = 1				1		1			
n = 2			1		2		1		
n = 3		1		3		3		1	
n = 4	1		4		6		4		1

$\therefore (1 - 2x)^4 = 1 + 4(-2x) + 6(-2x)^2 + 4(-2x)^3 + (-2x)^4$

$= 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\left(k - \frac{1}{3}x\right)^5 = m - 135x + nx^2 + \ldots \ldots$

বা, $k^5 + {}^5C_1k^{5-1}.\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^5C_2k^{5-2}.\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots \ldots$

$= m - 135x + nx^2 + \ldots \ldots$

বা, $k^5 - 5k^4\left(\frac{x}{3}\right) + 10k^3\frac{x^2}{9} - \ldots \ldots = m - 135x + nx^2 - \ldots \ldots$

বা, $k^5 - \frac{5}{3}k^4x + \frac{10}{9}k^3x^2 - \ldots \ldots = m - 135x + nx^2 - \ldots \ldots$

উভয়পক্ষ হতে x, x^2 ও ধ্রুব পদের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-\frac{5}{3}k^4 = -135$

বা, $k^4 = 81$

বা, $k^4 = (3)^4$

$\therefore k = 3$

আবার, $n = \frac{10}{9}k^3$

$= \frac{10}{9}(3)^3 = 30$

এবং $m = k^5$

বা, $m = (3)^5$

$\therefore m = 243$

$\therefore k = 3, m = 243, n = 30$ **(Ans.)**

গ মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অনুপাত = r

সুতরাং, ধারাটি, $a + ar + ar^2 + \ldots \ldots$

প্রশ্নমতে, $a + ar + ar^2 = \frac{21}{2}$

বা, $a(1 + r + r^2) = \frac{21}{2}$ ... ... (i)

আবার, $a.\ ar.\ ar^2 = 8$

বা, $(ar)^3 = 2^3$

বা, $ar = 2$

বা, $a = \frac{2}{r}$ ... ... (ii)

a এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $\frac{2}{r}(1 + r + r^2) = \frac{21}{2}$

বা, $4 + 4r + 4r^2 = 21r$

বা, $4r^2 - 17r + 4 = 0$

বা, $4r^2 - 16r - r + 4 = 0$

বা, $4r(r - 4) - 1(r - 4) = 0$

বা, $(r - 4)(4r - 1) = 0$

হয়, $r - 4 = 0$ অথবা, $4r - 1 = 0$

$\therefore r = 4$ $\therefore r = \frac{1}{4}$

(ii) নং হতে, $r = 4$ হলে, $a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{4}$ হলে, $a = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

$\therefore$ ৩য় পদ, $ar^2 = \frac{1}{2} \times (4)^2 = 8$

অথবা, $ar^2 = 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির তৃতীয় পদ 8 অথবা $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ $C = \frac{\log_k(y + 5)}{\log_k y}$ এবং $D = p - 3 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}$.

ক. $25^a = 125^b$ হলে $\frac{3a}{2b}$ নির্ণয় কর। ২

খ. $D = 0$ হলে দেখাও যে, $p^3 - 9p^2 + 12p = 12$. ৪

গ. $C = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y = \frac{\sqrt{21} + 1}{2}$. ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $25^a = 125^b$

বা, $(5^2)^a = (5^3)^b$ বা, $5^{2a} = 5^{3b}$

বা, $2a = 3b$ বা, $a = \frac{3b}{2}$

$\therefore \frac{3a}{2b} = \frac{3\frac{3b}{2}}{2b} = \frac{9b}{4b} = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $D = p - 3 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}$

প্রশ্নমতে, $p - 3 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $p - 3 = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}$

বা, $(p - 3)^3 = \left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 - 3p^2.3 + 3p.3^2 - 3^3 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.5^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{1}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 5^2 + 5 + 3.5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(p - 3)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 30 + 3.5^{\frac{3}{3}}(p - 3)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 30 + 15p - 45$

$\therefore p^3 - 9p^2 + 12p = 12$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $C = \frac{\log_k(y + 5)}{\log_k y}$

প্রশ্নমতে, $\frac{\log_k(y + 5)}{\log_k y} = 2$

বা, $\log_k(y + 5) = 2 \log_k y$

বা, $\log_k(y + 5) = \log_k y^2$

বা, $y + 5 = y^2$

বা, $y^2 - y - 5 = 0$

$\therefore y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-5)}}{2.1}$

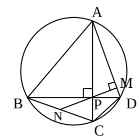
$= \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

[$ax^2 + bx + c = 0$ হলে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$]

কিন্তু $\frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ ঋণাত্মক হওয়ায় তা গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore y = \frac{\sqrt{21} + 1}{2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৪



ক. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের পরিধি 20 সে.মি. হলে, ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $BN = CN$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PM^2 = AM.DM$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 20$

$\therefore r = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ সে.মি.

আমরা জানি, পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ।

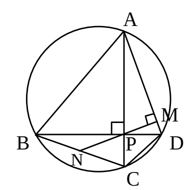
সুতরাং, পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $R = 2r = 2 \times \frac{10}{\pi} = \frac{20}{\pi}$ সে.মি.

$\therefore$ পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2 = \pi \times \left(\frac{20}{\pi}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{400}{\pi}$ বর্গ সে.মি.

$= 127.32$ বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

খ এখানে, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BD ও AC এর লম্ব ছেদবিন্দু P। $PM \perp AD$ এবং বর্ধিত NP, BC কে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BN = CN$।



প্রমাণ : একই চাপ CD এর উপর দণ্ডায়মান বলে,

$\angle DAC = \angle DBC$

অর্থাৎ, $\angle DAP = \angle PBN$

আবার, $\angle DAP = \angle DPM$ [উভয়ে একই $\angle APM$ এর পূরক কোণ]

সুতরাং, $\angle PBN = \angle NPB$

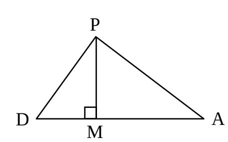
ফলে PBN ত্রিভুজে, $BN = PN$

অনুরূপভাবে দেখানো $\angle NCP = \angle ADP = \angle APM = \angle CPN$

ফলে PCN ত্রিভুজে, $CN = PN$

$\therefore BN = CN$ **(প্রমাণিত)**

গ এখানে, ΔPDA-এ $\angle DPA = 90°$ এবং $PM \perp DA$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = AM.DM$।



প্রমাণ : $\angle DPA = 90°$

$\therefore \angle DPM + \angle MPA = 90°$ .... (i)

আবার, $PM \perp DA$ বলে, $\angle PMD = \angle PMA = 90°$

ΔDPM-এ, $\angle PMD + \angle DPM + \angle PDM = 180°$

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $90° + \angle DPM + \angle PDM = 180$ [$\because \angle PMD = 90°$]

বা, $\angle DPM + \angle PDM = 90°$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\angle DPM + \angle MPA = \angle DPM + \angle PDM$

$\therefore \angle MPA = \angle PDM$

ΔPDM ও ΔPAM-এ

$\angle PMD = \angle PMA$, $\angle PDM = \angle MPA$

অবশিষ্ট $\angle DPM$ = অবশিষ্ট $\angle PAM$

$\therefore \Delta PDM$ ও ΔPAM সদৃশ

$\therefore \frac{DP}{PA} = \frac{PM}{AM} = \frac{DM}{PM}$

অর্থাৎ, $\frac{PM}{AM} = \frac{DM}{PM}$

$\therefore PM^2 = AM.DM$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫ A(– 4, 4), B(6, 4), C(6, – 7) এবং D(4, – 7) বিন্দু চারটি একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

ক. দেখাও যে, (3, – 5) এবং (6, 4) বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

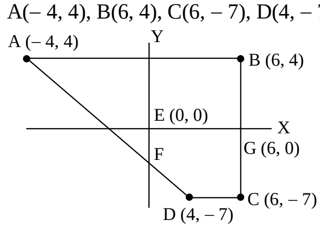
৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক (3, – 5) এবং (6, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{-5-4}{3-6} = \frac{-9}{-3} = 3$

আমরা জানি, কোনো সরলরেখার ঢাল ধনাত্মক হলে রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

যেহেতু (3, – 5) এবং (6, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল 3। সুতরাং, রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, A(– 4, 4), B(6, 4), C(6, – 7), D(4, – 7)



AB রেখার ঢাল $= \frac{4-4}{6-(-4)} = 0$

CD " " $\frac{-7-(-7)}{6-4} = 0$

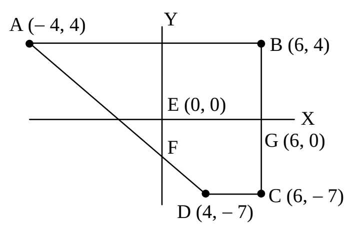
অর্থাৎ, AB ও CD রেখার ঢালদ্বয় পরস্পর সমান।

$\therefore$ AB || CD

আমরা জানি, ট্রাপিজিয়ামের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম। **(দেখানো হলো)**

গ



AD রেখার সমীকরণ, $\frac{y-4}{4-(-7)} = \frac{x-(-4)}{-4-4}$

বা, $\frac{y-4}{11} = \frac{x+4}{-8}$

বা, $11x + 44 = -8y + 32$

বা, $11x + 8y + 12 = 0$

সরলরেখাটি y অক্ষকে F বিন্দুতে ছেদ করলে, x = 0 $\therefore 8y + 12 = 0$

বা, $y = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ $\therefore$ F বিন্দুর স্থানাঙ্ক $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

আবার, B ও C বিন্দুর ভুজ সমান হওয়ায় BC রেখার সমীকরণ, x = 6।

$\therefore$ রেখাটি x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করলে, G বিন্দুর স্থানাঙ্ক G(6, 0)।

$\therefore$ চতুর্থ চতুর্ভাগে EFDCG-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -7 & -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|0 - 0 - 28 - 0 - 0 - 0 + 6 + 42 + 42|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times 62$ বর্গএকক

= 31 বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৬ P(– 6, 5), Q(– 11, – 6), R(7, – 2), S(8, h) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু যেখানে $h > 0$.

ক. (– 5, – 3) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. T(x, y) বিন্দুটি P ও Q বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, $5x + 11y + 48 = 0$. ৪

গ. PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল, ΔPQR এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে, h এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore$ (– 5, – 3) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y - (-3) = 3\{x - (-5)\}$

বা, $y + 3 = 3(x + 5)$

বা, $y + 3 = 3x + 15$

বা, $3x - y + 12 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, P(– 6, 5) এবং Q(– 11, – 6)

T(x, y) বিন্দু হতে P(– 6, 5) বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(x+6)^2 + (y-5)^2}$

$= \sqrt{x^2 + 12x + 36 + y^2 - 10y + 25}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + 12x - 10y + 61}$

T(x, y) বিন্দু হতে Q(– 11, – 6) বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(x+11)^2 + (y+6)^2}$

$= \sqrt{x^2 + 22x + 121 + y^2 + 12y + 36}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + 22x + 12y + 157}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{x^2 + y^2 + 12x - 10y + 61} = \sqrt{x^2 + y^2 + 22x + 12y + 157}$

বা, $x^2 + y^2 + 12x - 10y + 61 = x^2 + y^2 + 22x + 12y + 157$ [বর্গ করে]

বা, $12x - 10y + 61 = 22x + 12y + 157$

বা, $10x + 22y + 96 = 0$

$\therefore$ $5x + 11y + 48 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, P(– 6, 5), Q(– 11, – 6), R(7, – 2), S(8, h)

$\therefore$ ΔPQR এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & -11 & 7 & -6 \\ 5 & -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}(36 + 22 + 35 + 55 + 42 - 12)$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times 178$ বর্গএকক = 89 বর্গএকক

$\because h > 0$. সুতরাং, S(8, h) বিন্দুর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে।

$\therefore$ চতুর্ভুজ PQRS এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & -11 & 7 & 8 & -6 \\ 5 & -6 & -2 & h & 5 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|36 + 22 + 7h + 40 + 55 + 42 + 16 + 6h|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|211 + 13h|$ বর্গএকক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|211 + 13h| = 2 \times 89$

বা, $211 + 13h = 356$

বা, $13h = 145$ বা, $h = \frac{145}{13}$

$\therefore h = \frac{145}{13}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৭ $M = \sin\theta$ এবং $N = \cos\theta$.

ক. $\cos\left(\frac{-25\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $12M^2 + 23N = 22$ এবং $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{2}{N^2} + \frac{M^2}{N^2} = 3$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\cos\left(\frac{-25\pi}{3}\right) = \cos\frac{25\pi}{3}$ $[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= \cos\left(\frac{24\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(16 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = \sin\theta$

$N = \cos\theta$

এখন, $12M^2 + 23N = 22$

বা, $12\sin^2\theta + 23\cos\theta = 22$

বা, $12(1 - \cos^2\theta) + 23\cos\theta = 22$

বা, $12 - 12\cos^2\theta + 23\cos\theta = 22$

বা, $12\cos^2\theta - 23\cos\theta + 10 = 0$

বা, $12\cos^2\theta - 15\cos\theta - 8\cos\theta + 10 = 0$

বা, $3\cos\theta(4\cos\theta - 5) - 2(4\cos\theta - 5) = 0$

বা, $(4\cos\theta - 5)(3\cos\theta - 2) = 0$

হয়, $4\cos\theta - 5 = 0$ অথবা, $3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{5}{4}$ (গ্রহণযোগ্য নয়) $\therefore \cos\theta = \frac{2}{3}$

এখন, $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$

বা, $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

বা, $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

বা, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\left[\because \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right]$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $M = \sin\theta$, $N = \cos\theta$

এবং $\frac{2}{N^2} + \frac{M^2}{N^2} = 3$

বা, $\frac{2}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 3$

বা, $2\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3$

বা, $2(1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta = 3$

বা, $2 + 2\tan^2\theta + \tan^2\theta = 3$

বা, $3\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে,

১ম চতুর্ভাগে, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

৩য় চতুর্ভাগে,

$\tan\theta = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\tan\theta = \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6}$

২য় চতুর্ভাগে, $\tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \tan\frac{5\pi}{6}$

আবার,

৪র্থ চতুর্ভাগে,

$\tan\theta = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{11\pi}{6}$

সুতরাং, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) একটি মুদ্রা এবং একটি ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো। (ii) 22টি টিকেটে 31 হতে 52 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে। একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. সেপ্টেম্বর মাসে কোনো শহরে 12 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে 5 সেপ্টেম্বর বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং এর আলোকে সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ৪

গ. নির্বাচিত টিকেটের নম্বরটি জোড় অথবা 9 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

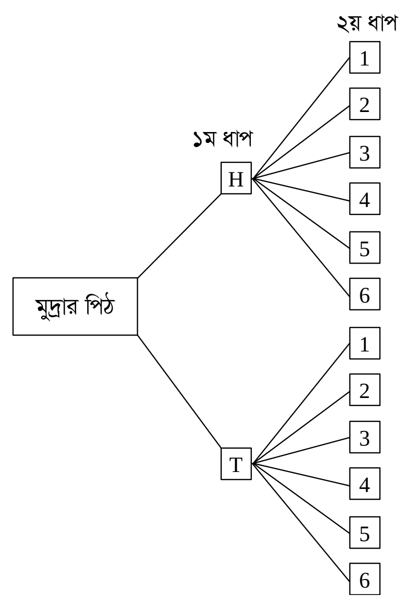
ক আমরা জানি, সেপ্টেম্বর মাস = 30 দিন

বৃষ্টি হয়েছে = 12 দিন

$\therefore$ বৃষ্টি হয়নি = (30 – 12) = 18 দিন

$\therefore$ 5 সেপ্টেম্বর বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

খ একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে ছয়টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। ঘটনাগুলোর মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিচের চিত্রে দেখানো হলো :



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি :

S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 12টি।

গ দেওয়া আছে, মোট টিকেট = 22টি

31 হতে 52 পর্যন্ত জোড় সংখ্যাগুলো : 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52

এবং 9 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো : 36, 45

আমরা জানি,

$$\text{কোন ঘটনার সম্ভাবনা} = \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}$$

এখানে, সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 22

এবং উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল = 12

[$\because$ 36 জোড় এবং 9 এর গুণিতক উভয়ই]

$\therefore$ P (জোড় অথবা 9 এর গুণিতক) $= \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$ **(Ans.)**

কুমিল্লা বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $F(x) = 1 - \frac{1}{3^x}$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?

ক $\log_3(x-1)$ খ $\log_3(1-x)$
গ $\log_3\left(\frac{1}{x-1}\right)$ ঘ $\log_3\left(\frac{1}{1-x}\right)$

২. $(3+x)(1-x)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত?

ক -2 খ -7 গ -23 ঘ -25

৩. $\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ = কত?

ক -3 খ $-\frac{1}{3}$ গ $\frac{1}{3}$ ঘ 3

৪. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান কত হবে?

ক $20x^3$ খ $15x^6$ গ $\frac{15}{x^6}$ ঘ $\frac{20}{x^3}$

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$(4x^2 + 4x + 1)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 7

৫. বিস্তৃতির চতুর্থ পদ কত?

ক $160x^3$ খ $160x^2$ গ $60x^3$ ঘ $60x^2$

৬. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমানুসারে বিস্তৃতিতে ২য় পদ 72 হলে, x = কত হবে?

ক 3 খ 4 গ 5 ঘ 6

৭. $-\sqrt{3}$ ঢালবিশিষ্ট সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে?

ক 30° খ 60° গ 120° ঘ 150°

৮. 4x + 5y = 20 রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক 9 খ 10 গ 20 ঘ 22

৯. দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, দুইটি টেল না আসার সম্ভাবনা কত?

ক $\frac{3}{4}$ খ $\frac{1}{4}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

১০. 10টি কালো ও 5টি লাল বল হতে দৈবভাবে একটি বল নির্বাচন করা হলে, বলটি–

i. লাল হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$
ii. লাল না হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$
iii. লাল অথবা কালো হওয়ার সম্ভাবনা 1

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১১. A(1, – 1) এবং N(4, t) বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার ঢাল 5 হলে t এর মান কত?

ক 15 খ 14 গ $\frac{8}{5}$ ঘ $-\frac{2}{5}$

১২. 2 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের একটি চাপ কেন্দ্রে 90° কোণ উৎপন্ন করলে চাপের দৈর্ঘ্য কত সে.মি. হবে?

ক π সে.মি. খ $\frac{3\pi}{2}$ সে.মি. গ 2π সে.মি. ঘ 4π সে.মি.

১৩. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ এর একটি উৎপাদক (x – 2) হলে, a এর মান কত?

ক 2 খ 4 গ 5 ঘ 6

১৪. $\frac{x(x^5 - 2x + 2)}{x}$ বহুপদীর ধ্রুবপদ কত?

ক 5 খ 2 গ 1 ঘ – 2

১৫. $P(x, y, z) = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটি–

i. সমমাত্রিক ii. চক্র-ক্রমিক iii. প্রতিসম

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৬. ΔABC এর ∠B সূক্ষ্মকোণ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

ক $AC^2 = AB^2 + BC^2$ খ $AC^2 > AB^2 + BC^2$
গ $AC^2 < AB^2 + BC^2$ ঘ $AB^2 < AC^2 + BC^2$

১৭. সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 সে.মি. হলে, এর পরিব্যাসার্ধ কত সে.মি.?

ক $\frac{\sqrt{3}}{4}$ সে. মি. খ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ সে. মি. গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ সে. মি. ঘ $\sqrt{3}$ সে. মি.

১৮. ABCD বৃত্তস্থ সামান্তরিকে $AB^2 + AD^2 = 80$ বর্গ সে. মি. হলে, BD এর মান কত সে. মি.?

ক 10 সে. মি. খ $5\sqrt{6}$ সে. মি. গ $5\sqrt{5}$ সে. মি. ঘ $4\sqrt{5}$ সে. মি.

১৯. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক $-\frac{25}{6}$ খ $\frac{1}{6}$ গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{25}{6}$

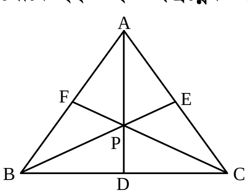
২০. দুপুর 1 : 20 টায় ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রি?

ক 80° খ 90° গ 110° ঘ 120°

২১. $\tan\theta = 3\sqrt{3}$ হলে, $\cos\theta$ = কত?

ক $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ খ $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ গ $\frac{3}{7\sqrt{7}}$ ঘ $\frac{1}{3\sqrt{7}}$

☐ **নিচের চিত্রের আলোকে ২২ ও ২৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



চিত্রে, AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি.।

২২. ΔABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর বর্গের সমষ্টি কত সে. মি.?

ক 66.67 সে. মি. (প্রায়) খ 60.76 সে. মি. (প্রায়)
গ 37.50 সে. মি. (প্রায়) ঘ 33.33 সে. মি. (প্রায়)

২৩. BP এর দৈর্ঘ্য কত সে. মি.?

ক $\frac{4}{3}$ সে. মি. খ $\frac{4}{2}$ সে. মি. গ $\frac{8}{3}$ সে. মি. ঘ $\frac{10}{3}$ সে. মি.

২৪. $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে, θ = ?

ক $\frac{\pi}{6}$ খ $\frac{\pi}{4}$ গ $\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{\pi}{2}$

২৫. θ এর সকল মানের জন্য–

i. $-1 \le \sin\theta \le 1$ ii. $|\cos\theta| \le 1$
iii. $-1 \le \sec\theta \le 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক ii খ iii গ i ও ii ঘ ii ও iii

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

কুমিল্লা বোর্ড-২০২৩

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** 1 2 6

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

ক. $2.\dot{1}0\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 - 4a - 4b + 1 = 0$. ৪

গ. $\frac{x^2 + 5}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২. $1 + (3x - 1)^{-1} + (3x - 1)^{-2} + \ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ক. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ২

খ. $x = \frac{4}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩. $P = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a^2 + b^2 = 18ab$.

ক. প্রমাণ কর যে, $x^{\log_a y} = \log_a x$. ২

খ. $P = a^2 + 2$ এবং $a \geq 0$ হলে দেখাও যে, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_k\left(\frac{a - b}{4}\right) = \log_k\sqrt{a} + \log_k\sqrt{b}$ ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো A(4, 3), B(– 3, 3), C(– 3, – 2) এবং D(4, – 2).

ক. A ও C বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. P(x, y) বিন্দু থেকে A এবং C বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, $7x + 5y = 6$. ৪

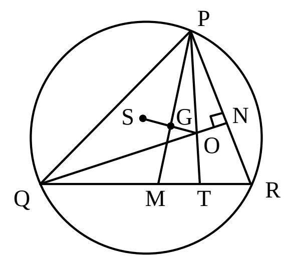
৫. (i) $y = 3x + 4$ এবং
(ii) $y = -3x + 4$ হলো দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. (4, 5) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং রেখাটি x অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী এবং 4 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৬.



চিত্রে, S পরিকেন্দ্র এবং M, QR এর মধ্যবিন্দু।

ক. QN = 5 সেমি এবং QR = 7 সেমি হলে, PR এর উপর QR এর লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + MR^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PG : GM = 2 : 1$ ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭. $A = \sec\theta + \tan\theta$ এবং $B = \sec\theta - \tan\theta$

ক. $\tan\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{A - 1}{1 - B} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$. ৪

গ. $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮. (i) একটি থলেতে 10টি নীল, 12টি হলুদ এবং 8টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেওয়া হলো।
(ii) একটি মুদ্রাকে চারবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে, মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (ii) নং এর আলোকে Probability tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো মার্বেক হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	গ	৩	খ	৪	ঘ	৫	ক	৬	ঘ	৭	গ	৮	খ	৯	ক	১০	ঘ	১১	খ	১২	ক	১৩	খ
	১৪	খ	১৫	ক	১৬	গ	১৭	খ	১৮	ঘ	১৯	ঘ	২০	ক	২১	খ	২২	ক	২৩	গ	২৪	গ	২৫	গ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

ক. $2.\dot{1}0\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 - 4a - 4b + 1 = 0$. ৪

গ. $\dfrac{x^2+5}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2.\dot{1}0\dot{2} = 2 + (0.102 + 0.000102 + \dots\dots)$

বন্ধনীর ভেতরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা

যার প্রথম পদ, $a = 0.102$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.000102}{0.102} = 0.001$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{0.102}{1-0.001} = \dfrac{0.102}{0.999} = \dfrac{102}{999} = \dfrac{34}{333}$

$\therefore \quad 2.\dot{1}0\dot{2} = 2 + \dfrac{34}{333} = \dfrac{700}{333}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

যেহেতু $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ একই থাকে

$\therefore P(a) = P(b)$

বা, $a^3 - 4a^2 + a + 6 = b^3 - 4b^2 + b + 6$

বা, $a^3 - b^3 - 4a^2 + 4b^2 + a - b = 0$

বা, $(a-b)(a^2+ab+b^2) - 4(a+b)(a-b) + (a-b) = 0$

বা, $(a-b)(a^2+ab+b^2-4a-4b+1) = 0$

হয়, $a - b = 0$ অথবা, $a^2 + ab + b^2 - 4a - 4b + 1 = 0$

কিন্তু $a \neq b$ (প্রশ্নানুসারে)

$\therefore a^2 + ab + b^2 - 4a - 4b + 1 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$= x^3 + x^2 - 5x^2 - 5x + 6x + 6$

$= x^2(x+1) - 5x(x+1) + 6(x+1)$

$= (x+1)(x^2-5x+6) = (x+1)(x^2-3x-2x+6)$

$= (x+1)\{x(x-3) - 2(x-3)\} = (x+1)(x-2)(x-3)$

মনে করি, $\dfrac{x^2+5}{P(x)} = \dfrac{x^2+5}{(x+1)(x-2)(x-3)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-3}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

বা, $x^2 + 5 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$ ... ... (ii)

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 + 5 = A(-3)(-4) + B.0 + C.0$

বা, $6 = 12A \quad \therefore A = \dfrac{1}{2}$

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$(2)^2 + 5 = A.0 + B(3)(-1) + C.0$

বা, $9 = -3B \; \therefore B = -3$

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$(3)^2 + 5 = A.0 + B.0 + C(4)(1)$

বা, $14 = 4C \quad \therefore C = \dfrac{7}{2}$

A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x^2+5}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{7}{2(x-3)}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $1 + (3x-1)^{-1} + (3x-1)^{-2} + \dots\dots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ক. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dots\dots\dots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ২

খ. $x = \dfrac{4}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

এখানে, $r < 1$, তাই অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $1 + (3x-1)^{-1} + (3x-1)^{-2} + \dots\dots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা $x = \dfrac{4}{3}$ হলে ধারাটি, $1 + \dfrac{1}{\left(3 \times \frac{4}{3} - 1\right)} + \dfrac{1}{\left(3 \times \frac{4}{3} - 1\right)^2} + \dots\dots$

বা, $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dots\dots$

ধারাটি প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{3} \quad (r < 1)$

ধারাটির n পদের সমষ্টি, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore$ " 10 " " $S_{10} = \dfrac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \dfrac{1 - \frac{1}{3^{10}}}{\frac{3-1}{3}} = \dfrac{\frac{3^{10}-1}{3^{10}}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3^{10}-1}{3^{10}} \times \dfrac{3}{2}$

$= \dfrac{3^{10}-1}{2 \times 3^9}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $1 + (3x-1)^{-1} + (3x-1)^{-2} + \dots\dots$

বা, $1 + \dfrac{1}{3x-1} + \dfrac{1}{(3x-1)^2} + \dots\dots$

একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{3x-1}}{1} = \dfrac{1}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয় অর্থাৎ $-1 < r < 1$

এখন, $\frac{1}{3x-1} > -1$
বা, $3x - 1 < -1$
বা, $3x < -1 + 1$
বা, $3x < 0 \therefore x < 0$

অথবা, $\frac{1}{3x-1} < 1$
বা, $3x - 1 > 1$
বা, $3x > 1 + 1$
বা, $3x > 2 \therefore x > \frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত $x < 0$ অথবা, $x > \frac{2}{3}$

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3x-1}}$

$= \frac{1}{\frac{3x-2}{3x-1}} = \frac{3x-1}{3x-2}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি $\frac{3x-1}{3x-2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ $P = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a^2 + b^2 = 18ab$.

ক. প্রমাণ কর যে, $x^{\log_a y} = \log_a x$. ২

খ. $P = a^2 + 2$ এবং $a \geq 0$ হলে দেখাও যে, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_k\left(\frac{a-b}{4}\right) = \log_k\sqrt{a} + \log_k\sqrt{b}$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $p = \log_a y$
সুতরাং $a^p = y$
$\therefore (a^p)^q = y^q$
বা, $a^{pq} = y^q$

$q = \log_a x$
$a^q = x$
$\therefore (a^q)^p = x^p$
বা, $a^{pq} = x^p$

$\therefore x^p = y^q$
$\therefore x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $p = a^2 + 2$

বা, $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ [উদ্দীপক হতে]

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^0.a$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $a^3 = \frac{9-1-9a}{3}$

বা, $3a^3 = 8 - 9a$

$\therefore a^3 + 3a = \frac{8}{3}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 18ab$

বা, $a^2 - 2ab + b^2 = 16ab$ বা, $(a-b)^2 = (4\sqrt{ab})^2$

বা, $\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 = (\sqrt{ab})^2$ বা, $\frac{a-b}{4} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

বা, $\log_k\left(\frac{a-b}{4}\right) = \log_k(\sqrt{a}.\sqrt{b})$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

$\therefore \log_k\left(\frac{a-b}{4}\right) = \log_k\sqrt{a} + \log_k\sqrt{b}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৪ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো A(4, 3), B(– 3, 3), C(– 3, – 2) এবং D(4, – 2).

ক. A ও C বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. P(x, y) বিন্দু থেকে A এবং C বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, 7x + 5y = 6. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(4, 3) এবং C(– 3, – 2)

$\therefore$ A ও C বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল,

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{-3-4} = \frac{5}{7}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

A(4, 3), B(– 3, 3), C(– 3, – 2) এবং D(4, – 2)

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|(12 + 6 + 6 + 12) - (-9 - 9 - 8 - 8)$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|12 + 6 + 6 + 12 + 9 + 9 + 8 + 8|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times 70$ বর্গএকক

$= 35$ বর্গএকক **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, P(x, y), A(4, 3), C(– 3, – 2)

এখন, P বিন্দু থেকে A বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$

আবার, P বিন্দু হতে C বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$

$= \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13}$

বা, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 = x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13$

বা, $-14x - 10y = -12$

$\therefore 7x + 5y = 6$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ (i) y = 3x + 4 এবং
(ii) y = – 3x + 4 হলো দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. (4, 5) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং রেখাটি x অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী এবং 4 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

$\therefore$ (4, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখা

$\frac{y-5}{5-3} = \frac{x-4}{4-2}$

বা, $\frac{y-5}{2} = \frac{x-4}{2}$

বা, $x - y + 1 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = 3x + 4$

যেহেতু রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে সেহেতু A বিন্দুতে $y = 0$

$\therefore 0 = 3x + 4$

বা, $3x = -4$

$\therefore x = -\frac{4}{3}$ $\therefore A \equiv \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

আবার, রেখাটি y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে সেহেতু B বিন্দুতে $x = 0$

$\therefore y = 4$ $\therefore B \equiv (0, 4)$

সুতরাং $AB = \sqrt{\left(-\frac{4}{3} - 0\right)^2 + (0 - 4)^2}$

$= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}}$

$= \frac{4\sqrt{10}}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $y = 3x + 4$ ... ... (i)

$y = -3x + 4$ ... ... (ii)

সমীকরণদ্বয় সমাধান করে পাই, $3x + 4 = -3x + 4$

বা, $6x = 0$

$\therefore x = 0$ ... ... (iii)

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $y = 4$

সুতরাং, সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু (0, 4)

(0, 4) ছেদবিন্দুগামী এবং 4 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

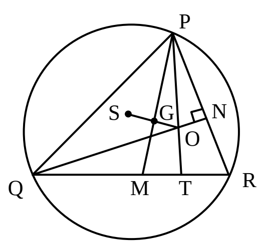
$y - y_1 = m(x - x_1)$

বা, $y - 4 = 4(x - 0)$

বা, $y - 4 = 4x$

$\therefore 4x - y + 4 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৬



চিত্রে, S পরিকেন্দ্র এবং M, QR এর মধ্যবিন্দু।

ক. QN = 5 সেমি এবং QR = 7 সেমি হলে, PR এর উপর QR এর লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

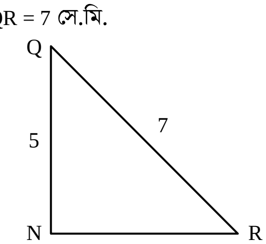
খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + MR^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PG : GM = 2 : 1 ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, QN = 5 সে.মি.

QR = 7 সে.মি.

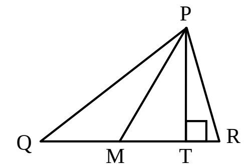


PR এর উপর QR এর লম্ব অভিক্ষেপ RN

$\therefore \Delta QNR$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ

$\therefore RN = \sqrt{QR^2 - QN^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}$ সে.মি. **(Ans.)**

খ



এখানে, ΔPQR এ QR এর মধ্যবিন্দু M হওয়ার PM একটি মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + MR^2)$.

প্রমাণ : চিত্রে, PQ > PM > QM। P বিন্দু হতে $PT \perp QR$.

$\therefore \Delta PQM$ এর $\angle PMQ$ স্থূলকোণ এবং PM এর লম্ব অভিক্ষেপ MT.

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2.QM.MT$ ... ... (i)

আবার, ΔPMR এর $\angle PMR$ সূক্ষ্মকোণ এবং PM এর লম্ব অভিক্ষেপ MT.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PM^2 + MR^2 - 2.MR.MT$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.MT + PM^2 + MR^2 - 2MR.MT$

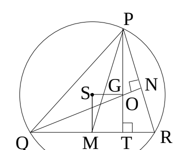
$= 2PM^2 + MR^2 + 2MR.MT + QM^2 - 2MR.MT$

[$\because MR = QM$]

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2MR^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + MR^2)$. **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, Δ PQR এর পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং PM একটি মধ্যমা। S, M যোগ করি। ফলে SM রেখা QR এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, PG : GM = 2 : 1

প্রমাণ :

Δ PQR এর লম্ববিন্দু O থেকে P শীর্ষের দূরত্ব OP এবং পরিকেন্দ্র S থেকে P শীর্ষের বিপরীত বাহু QR এর দূরত্ব SM।

$\therefore$ OP = 2SM [কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্বদূরত্বের দ্বিগুণ]

এখন যেহেতু PT ও SM উভয়ই QR এর উপর লম্ব।

সেহেতু $PT \parallel SM$.

এখন, $PT \parallel SM$ এবং PM এদের ছেদক।

$\therefore \angle MPT = \angle PMS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ $\angle OPG = \angle SMG$

এখন, Δ PGO ও ΔMGS এর মধ্যে

$\angle PGO = \angle MGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OPG = \angle SMG$ [একান্তর কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle POG = \angle MSG$

$\therefore \Delta PGO$ ও Δ MGS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PG}{GD} = \frac{OP}{SD}$

বা, $\frac{PG}{GD} = \frac{2SD}{SD}$ [$\because OP = 2SM$]

বা, $\frac{PG}{GD} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ PG : GM = 2 : 1 **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $A = \sec\theta + \tan\theta$ এবং $B = \sec\theta - \tan\theta$

ক. $\tan\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{A-1}{1-B} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$. ৪

গ. $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(8\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \sec\theta + \tan\theta$

$B = \sec\theta - \tan\theta$

বামপক্ষ $= \frac{A-1}{1-B} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(1 - \sec\theta + \tan\theta)}$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{1 - \sin^2\theta}{(1 - \sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta}{(1 - \sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

বা, $3(1 - \sin\theta)^2 = \cos^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $3(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta) = 1 - \sin^2\theta$

বা, $3 - 6\sin\theta + 3\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$

কিন্তু $\sin\theta \neq 1 \left[\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় $\theta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) একটি থলেতে 10টি নীল, 12টি হলুদ এবং 8টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেওয়া হলো।

(ii) একটি মুদ্রাকে চারবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে, মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (ii) নং এর আলোকে Probability tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো মার্বেক হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

নমুনা বিন্দু = 6টি

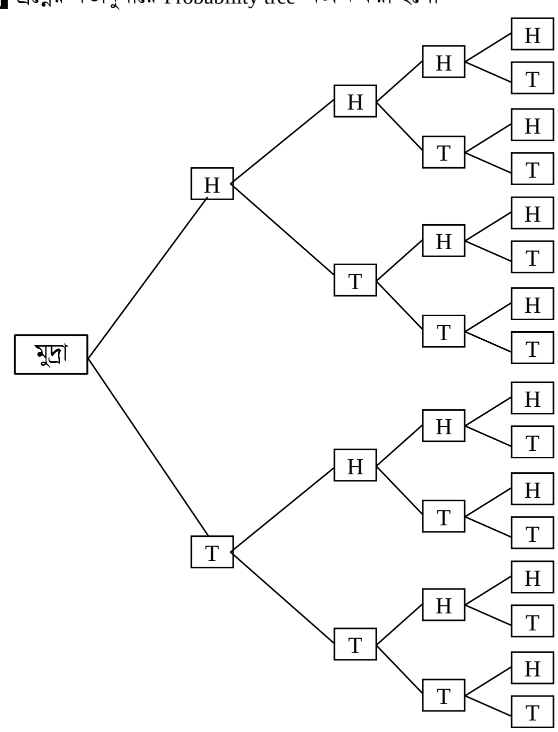
1 থেকে 6 এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা = 2, 3, 5

ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল = 3

$\therefore$ ছক্কা একবার নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ প্রশ্নের শর্তানুসারে Probability tree অঙ্কন করা হলো–



নমুনাক্ষেত্র S = {HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT} **(Ans.)**

গ থলেতে নীল মার্বেল = 10টি

হলুদ মার্বেল = 12টি

কালো মার্বেল = 8টি

থলেতে মোট মার্বেল = (10 + 12 + 8) টি = 30টি

$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেওয়া হলে তবে সবগুলো (চারটি) মার্বেল হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{12}{30} \times \frac{11}{29} \times \frac{10}{28} \times \frac{9}{27} = \frac{11}{609}$ **(Ans.)**

যশোর বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা)

বিষয় কোড : 1 2 6

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] পূর্ণমান : ২৫

[বিশেষ দ্রষ্টব্য : সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।] **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল 64π বর্গ সে.মি. হলে, এর নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
ⓚ 64 সে. মি. ⓚ 16 সে. মি. ⓖ 8 সে. মি. ⓖ 4 সে. মি.

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ২ ও ৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

২. $P(x)$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত?
ক) -12 খ) -6 গ) 6 ঘ) 12

৩. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক নিচের কোনটি?
ক) $2x + 1$ খ) $2x - 1$ গ) $x + 1$ ঘ) $x - 1$

৪. $(y^y)^{\sqrt{y}} = (y\sqrt{y})^y$ হলে $\sqrt{y}$ = কত?
ক) $\frac{1}{2}$ খ) 1 গ) $\frac{3}{2}$ ঘ) $\frac{9}{4}$

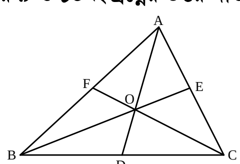
৫. $A(-3, 3)$, $B(-3, -3)$ এবং $C(3, 3)$ তিনটি বিন্দু হলে–
i. AC রেখার ঢাল = 0 ii. BC রেখার সমীকরণ, $y = x$
iii. A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৬. $(1 + x)(1 - x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত?
ক) 10 খ) 1 গ) -4 ঘ) -5

৭. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{4}{3^4}$ .... অনুক্রমটির সাধারণ পদ কত?
ক) $\frac{n}{3^{n-1}}$ খ) $\frac{n+1}{3^{n-1}}$ গ) $\frac{n}{3^n}$ ঘ) $\frac{n+1}{3^n}$

৮. $\tan^2 A = 3$ এবং $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ হলে, A এর মান নিচের কোনটি?
ক) $\frac{\pi}{6}$ খ) $\frac{\pi}{4}$ গ) $\frac{\pi}{3}$ ঘ) $\frac{2\pi}{3}$

□ **নিচের তথ্যানুসারে ৯ ও ১০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



চিত্রে AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

৯. DO : OA = কত?
ক) 1 : 2 খ) 1 : 3 গ) 2 : 1 ঘ) 3 : 1

১০. $(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 72$ বর্গ সে.মি. হলে, $(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ এর মান কত?
ক) 18 বর্গ সে. মি. খ) 54 বর্গ সে. মি.
গ) 72 বর্গ সে. মি. ঘ) 96 বর্গ সে. মি.

১১. নিচের কোনটি $0.1\dot{8}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ?
ক) $\frac{17}{99}$ খ) $\frac{2}{11}$ গ) $\frac{17}{90}$ ঘ) $\frac{1}{5}$

১২. 1 থেকে 20 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর মধ্যে একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। সংখ্যাটি 3 এর গুণিতক এবং মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক) $\frac{7}{10}$ খ) $\frac{2}{5}$ গ) $\frac{3}{10}$ ঘ) $\frac{1}{20}$

১৩. নিচের কোনটি চক্রক্রমিক রাশি?
ক) $x^3 + y^3 + x^3 + 3x^2yz$ খ) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$
গ) $3x^2y + 2y^2z + z^2x$ ঘ) $x^2 - y^2 + z^2$

১৪. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে–
i. পদসংখ্যা = 9
ii. ২য় পদের সহগ = -8
iii. x বর্জিত পদ = 70
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১৫. $f(x) = 4^x$ সূচকীয় ফাংশনের ডোমেন কোনটি?
ক) $(-\infty, 4)$ খ) $(-\infty, 0)$ গ) $(0, \infty)$ ঘ) $(-\infty, \infty)$

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৬ ও ১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$y = -x - 1$ এবং $y = 3x - 5$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

১৬. রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
ক) $(1, -2)$ খ) $(1, 2)$ গ) $(-1, 2)$ ঘ) $(-1, -2)$

১৭. রেখা দুইটির ঢালদ্বয়ের গুণফল কত?
ক) -3 খ) -1 গ) 3 ঘ) 5

১৮. দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একসাথে একবার নিক্ষেপ করলে ছক্কার উপরের পিঠে একই সংখ্যা না আসার সম্ভাবনা কত?
ক) $\frac{35}{36}$ খ) $\frac{5}{6}$ গ) $\frac{1}{6}$ ঘ) $\frac{1}{36}$

১৯. $7^{\log_7 3^2}$ এর মান কত?
ক) 2 খ) 3 গ) 7 ঘ) 9

২০. 90° কোণের বৃত্তীয়মান কোনটি?
ক) $\frac{\pi^c}{6}$ খ) $\frac{\pi^c}{4}$ গ) $\frac{\pi^c}{3}$ ঘ) $\frac{\pi^c}{2}$

২১. $P(y) = y^3 - 3y^2 + 2y - 1$ বহুপদীর মুখ্যসহগ এবং ধ্রুবপদের সমষ্টি কত?
ক) 1 খ) 0 গ) -1 ঘ) -3

২২. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, $\cos 2\theta$ এর মান কত?
ক) 0 খ) $\frac{1}{2}$ গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ) 1

২৩. দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপে সর্বাধিক দুইটি H পাওয়ার সম্ভাবনা কত?
ক) 0 খ) $\frac{1}{4}$ গ) $\frac{3}{4}$ ঘ) 1

২৪. ΔPQR এ $PQ^2 > QR^2 + PR^2$ হলে–
i. $\angle PRQ$ স্থূলকোণ
ii. $\angle QPR$ সমকোণ
iii. $\angle PQR$ সূক্ষ্মকোণ
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

২৫. (2, 5) বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{2}$ ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
ক) $2y = x + 8$ খ) $2y = x - 1$ গ) $y = x + 8$ ঘ) $y = x - 1$

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

যশোর বোর্ড-২০২৩

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান :** ৫০

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $P(x) = 48x^4 - 4x^3 - 16x^2 + x + 1$
$Q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

ক. $Q(x)$ কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে, তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{2x^2 - 3x + 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $x - 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ এবং $y = \frac{3 - x}{4 + x}$

ক. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = 0$ ৪

গ. $\ln y = 1$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩। $p = a + bx^2$ একটি দ্বিপদী বিস্তৃতি।

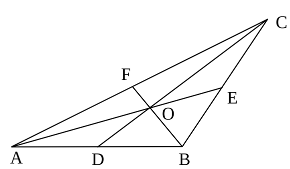
ক. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $a = \frac{1}{x}$ এবং $b = -2$ হয় তবে, p^5 কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. $a = 2x^2$, $b = \frac{k}{x^3}$ এর জন্য P^8 এর বিস্তৃতিতে চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সহগ সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



চিত্রে AB, BC এবং CA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F. AB = BC এবং $BF \perp AC$.

ক. AO = 5 সে. মি. হলে AE এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. ΔABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে, $BC^2 = 2R.\ BF$. ৪

৫। তিনটি সরলরেখার সমীকরণ (i) $y = 3x - 10$, (ii) $2x - y = 4$ এবং (iii) $7x - y = 14$.

ক. (ii) নং সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে নির্ণয় কর। ২

খ. (iii) নং সরলরেখাটি দ্বারা x ও y-অক্ষের ছেদ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করেছে। $PE \perp BC$ এবং EP এর বর্ধিতাংশ AD কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. $x - \sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$ সরলরেখাটি মূলবিন্দু হতে কত দূরে x-অক্ষকে ছেদ করেছে নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AF = FD. ৪

গ. BP এর মধ্যবিন্দু M হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AM^2 + 3BM^2$ ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $A = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$

$B = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$ যখন $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ক. 1.532 রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. A = 4 হলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

গ. α এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (i) একটি ঝুড়িতে 10টি নীল, 12টি সবুজ ও 8টি হলুদ বল আছে।

(ii) একজন লোকের রাজশাহী হতে ঢাকায় ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$ এবং ঢাকা হতে কুমিল্লায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে, মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হলে, বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা এবং হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	ঘ	২	ক	৩	খ	৪	গ	৫	ক	৬	গ	৭	গ	৮	ঘ	৯	ক	১০	ঘ	১১	গ	১২	ঘ	১৩	খ
	১৪	ঘ	১৫	ঘ	১৬	ক	১৭	ক	১৮	খ	১৯	ঘ	২০	ঘ	২১	খ	২২	খ	২৩	ঘ	২৪	খ	২৫	ক		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $P(x) = 48x^4 - 4x^3 - 16x^2 + x + 1$
$Q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

ক. $Q(x)$ কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে, তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ভাজ্য : $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

ভাজক : $x + 1$

ভাগশেষ উপপাদ্যের অনুযায়ী ভাগশেষ হবে $Q(-1)$।

$Q(-1) = 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 + 2 \times (-1) - 1$
$= -2 - 1 - 2 - 1 = -6$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ = -6 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p(x) = 48x^4 - 4x^3 - 16x^2 + x + 1$

এখন, $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 48\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 16\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

$= \frac{48}{16} + \frac{4}{8} - \frac{16}{4} - \frac{1}{2} + 1$

$= 3 + \frac{1}{2} - 4 - \frac{1}{2} + 1 = 0$

$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)$ বা, $(2x + 1)$; $p(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore P(x) = 48x^4 - 4x^3 - 16x^2 + x + 1$
$= 48x^4 + 24x^3 - 28x^3 - 14x^2 - 2x^2 - x + 2x + 1$
$= 24x^3(2x + 1) - 14x^2(2x + 1) - x(2x + 1) + 1(2x + 1)$
$= (2x + 1)(24x^3 - 14x^2 - x + 1)$
$= (2x + 1)(24x^3 - 12x^2 - 2x^2 + x - 2x + 1)$
$= (2x + 1)\{12x^2(2x - 1) - x(2x - 1) - 1(2x - 1)\}$
$= (2x + 1)(2x - 1)(12x^2 - x - 1)$
$= (2x + 1)(2x - 1)(12x^2 + 3x - 4x - 1)$
$= (2x - 1)(2x + 1)\{3x(4x + 1) - 1(4x + 1)\}$
$= (2x - 1)(2x + 1)(4x + 1)(3x - 1)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
$= x^2(2x - 1) + 1(2x - 1)$
$= (2x - 1)(x^2 + 1)$

$\therefore \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{(2x - 1)(x^2 + 1)} \equiv \dfrac{A}{(2x - 1)} + \dfrac{Bx + C}{(x^2 + 1)}$ ... ... (i)

উভয়পক্ষকে $(2x - 1)(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে,

$2x^2 - 3x + 1 \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)(2x - 1)$ ... ... (ii)

(ii) নং অভেদে $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$\left\{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} - \left(3 \times \frac{1}{2}\right) + 1 = A\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right\} + 0$

বা, $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = A\left(\frac{5}{4}\right)$

বা, $0 = \frac{5A}{4}$ $\therefore A = 0$

আবার, (ii) নং হতে পাই,

$2x^2 - 3x + 1 \equiv Ax^2 + A + 2Bx^2 - Bx + 2Cx - C$ ... ... (iii)

(iii) নং এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$2 = A + 2B$

বা, $2 = 0 + 2B$ $[\because A = 0]$

বা, $B = 1$

এবং x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-3 = -B + 2C$

বা, $-3 = -1 + 2C$ $[\because B = 1]$

বা, $2C = -2$

$\therefore C = -1$

এখন, A, B এবং C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{(2x - 1)(x^2 + 1)} \equiv \dfrac{0}{2x - 1} + \dfrac{1 \times x + (-1)}{x^2 + 1}$

বা, $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{(2x - 1)(x^2 + 1)} \equiv \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $x - 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ এবং $y = \dfrac{3 - x}{4 + x}$

ক. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = 0$ ৪

গ. $\ln y = 1$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

ধারাটির, (যেকোনো পদ ÷ পূর্ব পদ) $= \frac{1}{3^2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

অর্থাৎ, ধারাটি গুণোত্তর ধারা।

যার সাধারণ অন্তর, $r = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{3 - 1}{3}} = \dfrac{3}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$x - 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$

বা, $x - 1 = 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$ ... ... (i)

বা, $(x - 1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষে ঘন করে]

বা, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 - \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3^2 - 3 - 3^{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}}(x - 1)$ [(i) নং হতে]

বা, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 9 - 3 - 3^2.(x - 1)$

বা, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 6 - 9(x - 1)$

বা, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 6 - 9x + 9$

$\therefore x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = 0$. **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $y = \frac{3-x}{4+x}$ এবং $\ln y = 1$

বা, $\ln y = \ln\left(\frac{3-x}{4+x}\right)$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $1 = \ln(3-x) - \ln(4+x)$ $[\because \ln y = 1]$

বা, $1 + \ln(4+x) = \ln(3-x)$

বা, $\ln(e) + \ln(4+x) = \ln(3-x)$ $[\ln(e) = 1]$

বা, $\ln\{e(4+x)\} = \ln(3-x)$

বা, $\ln(4e + ex) = \ln(3-x)$

বা, $4e + ex = 3 - x$ [উভয়পক্ষে ln বাদ দিয়ে]

বা, $ex + x = -4e + 3$

বা, $x(e+1) = 3 - 4e$ $\therefore x = \frac{3-4e}{e+1}$

$\therefore$ নির্ণেয় $x = \frac{3-4e}{e+1}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ $p = a + bx^2$ একটি দ্বিপদী বিস্তৃতি।

ক. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{1}{4}$, ... অনুক্রমটির সাধারণ পদ নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $a = \frac{1}{x}$ এবং $b = -2$ হয় তবে, p^5 কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. $a = 2x^2$, $b = \frac{k}{x^3}$ এর জন্য P^8 এর বিস্তৃতিতে চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সহগ সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

অনুক্রমটি $= \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2}, \frac{2}{2\times 2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{4\times 4}, \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2^1}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots\ldots$

$\therefore$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \frac{n}{2^n}$;

যেখানে, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = a + bx^2$

যেখানে, $a = \frac{1}{x}$ এবং $b = -2$

এখন, $p^5 = a^5 + {}^5C_1a^4bx^2 + {}^5C_2a^3(bx^2)^2 + {}^5C_3a^2(bx^2)^3 + {}^5C_4a(bx^2)^4 + {}^5C_5(bx^2)^5$

$= a^5 + 5a^4bx^2 + 10a^3b^2x^4 + 10a^2b^3x^6 + 5ab^4x^8 + b^5x^{10}$

$= \frac{1}{x^5} + 5\times\frac{1}{x^4}\times(-2)\times x^2 + 10\times\frac{1}{x^3}\times(-2)^2\times x^4 + 10\times\frac{1}{x^2}\times(-2)^3\times x^6 + 5\times\frac{1}{x}\times(-2)^4\times x^8 + (-2)^5x^{10}$

$\therefore p^5 = \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^2} + 40x - 80x^4 + 80x^7 - 32x^{10}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $p = a + bx^2$

বা, $p^8 = (a + bx^2)^8$

বা, $p^8 = \left(2x^2 + \frac{k}{x^3}.x^2\right)^8 = \left(2x^2 + \frac{k}{x}\right)^8$

$\therefore$ ৪র্থ বা (3 + 1) তম পদ $= {}^8C_3(2x^2)^{8-3}\left(\frac{k}{x}\right)^3$

$= {}^8C_3.2^5.x^{10}.k^3.x^{-3} = {}^8C_3.2^5.k^3.x^7$

৫ম বা (4 + 1) তম পদ $= {}^8C_4(2x^2)^{8-4}\left(\frac{k}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4.2^4.x^8.k^4.x^{-4} = {}^8C_4.2^4.k^4.x^4$

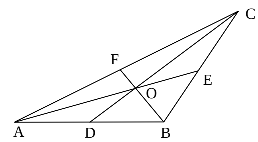
প্রশ্নমতে, ${}^8C_3.2^5.k^3 = {}^8C_4.2^4.k^4$

বা, $\frac{k^4}{k^3} = \frac{{}^8C_3.2^5}{{}^8C_4.2^4}$

বা, $k = \frac{56\times 32}{70\times 16}$

$\therefore k = \frac{8}{5}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৪



চিত্রে AB, BC এবং CA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F. AB = BC এবং BF ⊥ AC.

ক. AO = 5 সে. মি. হলে AE এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. ΔABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে, $BC^2 = 2R.BF$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

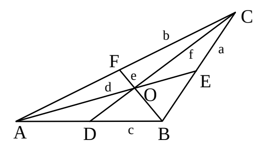
ক ABC ত্রিভুজে O ভরকেন্দ্র বলে, $\frac{AO}{OE} = \frac{2}{1}$

বা, $OE = \frac{AO}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ সে.মি.

$AE = AO + OE = 5 + 2.5 = 7.5$ সে.মি. **(Ans.)**

খ মনে করি, ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুগুলো a, b এবং c।

মধ্যমা BF = e, AE = d, CD = f



এখন, $AB^2 + AC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই]

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\}$ $\left[\because BE = \frac{1}{2}a\right]$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2.\frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $2d^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ ...... (i)

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ ...... (ii)

এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$ ...... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

বা, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$

এখন, AB = BC বা, c = a

তাহলে, মধ্যমা AE = CD

বা, d = f হবে।

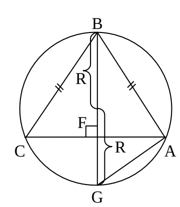
বা, $d^2 + e^2 + d^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - a^2 + 2a^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - a^2}{4} = \frac{3b^2 + 6a^2}{4}$

বা, $2d^2 + e^2 = \frac{3}{4}(b^2 + 2a^2)$

$\therefore 3(2a^2 + b^2) = 4(2d^2 + e^2)$

ইহাই উক্ত দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক।

গ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, ΔABC এ AB = BC। BF ⊥ AC এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 = 2R.BF$



অঙ্কন : BF কে বর্ধিত করি যেন তা পরিবৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করে। A, G যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle BFA$ ও $\triangle BAG$ এ,

$\angle BFA = \angle BAG$ [উভয়েই সমকোণ]

$\angle GBA = \angle GBA$ [সাধারণ কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle BAF$ = অবশিষ্ট $\angle BGA$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\frac{BF}{BA} = \frac{BA}{BG}$ [$\therefore$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $BA^2 = BF.BG$

বা, $BC^2 = BF.BG$ [$\therefore AB = BC$]

সমকোণী $\triangle BCF$ ও $\triangle BAF$ এর মধ্যে

অতিভূজ AB = অতিভূজ BC

এবং BF সাধারণ বাহু

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle BAF \therefore CF = FA$

অর্থাৎ, $BF \perp AC$ এবং AF ও FC সমদ্বিখণ্ডক। BF জ্যাটি বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। এবং BG বৃত্তের পরিধিকে স্পর্শ করে এজন্য BG বৃত্তের ব্যাস।

BG = 2R হলে (i) নং এ পাই,

$BC^2 = 2R.BF$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫ তিনটি সরলরেখার সমীকরণ (i) $y = 3x - 10$, (ii) $2x - y = 4$ এবং (iii) $7x - y = 14$.

ক. (ii) নং সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে নির্ণয় কর। ২

খ. (iii) নং সরলরেখাটি দ্বারা x ও y-অক্ষের ছেদ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2x - y = 4$

বা, $y = 2x - 4$

ঢাল, m = 2, x অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\alpha = 2$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2) = 63.43°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $7x - y = 14$

x অক্ষে ছেদ করলে y = 0 তাহলে, 7x = 14

$\therefore x = 2$

x অক্ষের স্থানাঙ্ক (2, 0)

আবার, y অক্ষের সাথে ছেদ করলে x = 0 তাহলে, – y = 14

$\therefore y = -14$

y অক্ষের স্থানাঙ্ক (0, – 14)

x ও y অক্ষের ছেদ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(2-0)^2 + (0+14)^2}$

$= \sqrt{200}$

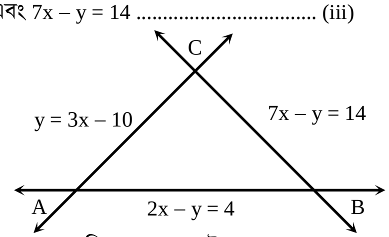
$= 10\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

গ প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ, $y = 3x - 10$

বা, $3x - y = 10$ .... (i)

$2x - y = 4$ ... . (ii)

এবং $7x - y = 14$ .... (iii)



(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$3x - y = 10$
$2x - y = 4$
(–) (+) (–)
$x = 6$

$\therefore y = (3 \times 6) - 10 = 18 - 10 = 8$

প্রথম ছেদ বিন্দু A(6, 8)

(iii) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$7x - y = 14$
$2x - y = 4$
(–) (+) (–)
$5x = 10$
$\therefore x = 2$

আবার, $(2 \times 2) - y = 4$

বা, y = 0

দ্বিতীয় ছেদবিন্দু B(2, 0)

(iii) নং হতে (i) নং বিয়োগ থেকে পাই,

$7x - y = 14$
$3x - y = 10$
(–) (+) (–)
$4x = 4$
$\therefore x = 1$

আবার, $y = (3 \times 1) - 10 = -7$

তৃতীয় ছেদবিন্দু C(1, – 7)

তিনটি ছেদ বিন্দু A, B, C দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & -7 & 8 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|(0 - 14 + 8) - (16 + 0 - 42)| = \frac{1}{2}|-6 + 26|$

$= \frac{1}{2}|20| = 10$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 10 বর্গএকক। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৬ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করেছে। $PE \perp BC$ এবং EP এর বর্ধিতাংশ AD কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. $x - \sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$ সরলরেখাটি মূলবিন্দু হতে কত দূরে x-অক্ষকে ছেদ করেছে নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AF = FD. ৪

গ. BP এর মধ্যবিন্দু M হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AM^2 + 3BM^2$ ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত সরল রেখাটি, $x - \sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$ .... (i)

যদি (i) নং রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে তবে y = 0 হবে।

$x = 4\sqrt{3}$

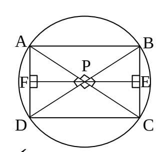
$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4\sqrt{3}, 0)$

মূলবিন্দু O(0, 0) বিন্দু হতে $A(4\sqrt{3}, 0)$ বিন্দুর দূরত্ব

$OA = \sqrt{(0 - 4\sqrt{3})^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2}$

$= 4\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। $PE \perp BC$ এবং EP এর বর্ধিতাংশ AD কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AF = FD.

প্রমাণ : এখানে, বৃত্তের ব্যাস = AC = BD

বা, AP + PC = BP + PD

বা, 2AP = 2PD [AP = PC; BP = PD]

$\therefore$ AP = PD ... ... (i)

এখন, $\triangle APF$ এ,

$AP^2 = AF^2 + FP^2$

আবার, $\triangle DPF$ এ,

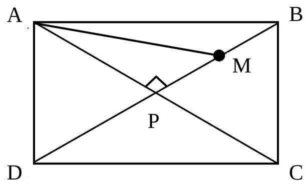
$PD^2 = FD^2 + FP^2$

(i) নং হতে পাই, $AF^2 + FP^2 = FD^2 + FP^2$

বা, $AF^2 = FD^2$

$\therefore$ AF = FD. **(প্রমাণিত)**

গ



দেওয়া আছে, ABCD একটি চতুর্ভুজ যার AC ও BD কর্ণ সমকোণীভাবে পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ $\angle APB = 90°$

অঙ্কন : BP এর মধ্যবিন্দু M। তাহলে BM = MP।

A, M যোগ করি।

প্রমাণ : এখন, ΔAPB এ,

$AB^2 = AP^2 + BP^2$

$= AP^2 + (BM + MP)^2$

$= AP^2 + (2BM)^2$ [BM = MP]

বা, $AB^2 = AP^2 + 4BM^2$ ... ... (i)

আবার, ΔAPM এ,

$AM^2 = AP^2 + PM^2$

বা, $AM^2 = AP^2 + BM^2$ [PM = BM]

বা, $AP^2 = AM^2 - BM^2$

AP^2 এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$AB^2 = AM^2 - BM^2 + 4BM^2$

$\therefore AB^2 = AM^2 + 3BM^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $A = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$

$B = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$ যখন $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ক. 1.532 রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. A = 4 হলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

গ. α এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\alpha = 1.532$ রেডিয়ান

$= \left(1.532 \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ \quad \left[\because 1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\right]$

$= 87.78°$

$= 87°(0.78 \times 60)'$

$= 87°46.8'$

$= 87°46'(0.8 \times 60)''$

$= 87°46'48''$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ এবং A = 4

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$ [$\therefore \sin^2\theta$]

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(দেখানো হলো)**

গ উক্ত প্রশ্নে তথ্য অপূর্ণ রয়েছে। সমীকরণটি সমাধান এর সুবিধার্থে B = 7 ধরে নিই।

$B = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$ যখন $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

বা, $15(1 - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha = 7$

বা, $15 - 15\sin^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$ [$\therefore \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$]

বা, $15\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 8 = 0$

বা, $15\sin^2\alpha - 12\sin\alpha + 10\sin\alpha - 8 = 0$

বা, $3\sin\alpha(5\sin\alpha - 4) + 2(5\sin\alpha - 4) = 0$

বা, $(3\sin\alpha + 2)(5\sin\alpha - 4) = 0$

হয়, $(3\sin\alpha + 2) = 0$ অথবা, $(5\sin\alpha - 4) = 0$

বা, $3\sin\alpha = -2$ বা, $5\sin\alpha = 4$

বা, $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ বা, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

বা, $\alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$ বা, $\alpha = \sin^{-1}\frac{4}{5}$

বা, $\alpha = -41.81° > -\frac{\pi}{2}$ বা, $\alpha = 53.13° < \frac{\pi}{2}$

অর্থাৎ, উভয় মানই গ্রহণযোগ্য।

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right), \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) একটি ঝুড়িতে 10টি নীল, 12টি সবুজ ও 8টি হলুদ বল আছে।
(ii) একজন লোকের রাজশাহী হতে ঢাকায় ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$ এবং ঢাকা হতে কুমিল্লায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$।

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে, মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. দৈবভাবে একটি বল নেওয়া হলে, বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা এবং হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা নিক্ষেপ এ মোট ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} অর্থাৎ, 6টি

মৌলিক সংখ্যা {2, 3, 5} বা, 3টি

সুতরাং মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

ঝুড়িতে নীল আছে 10 টি

" সবুজ " 12 "

" হলুদ " 8 টি

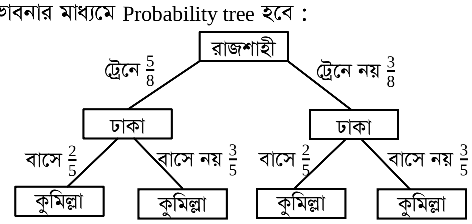
মোট বল সংখ্যা = 10 + 12 + 8 = 30টি।

$\therefore$ বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ **(Ans.)**

$\therefore$ বলটি হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{30}$

$\therefore$ বলটি হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা $= \left(1 - \frac{8}{30}\right) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$ **(Ans.)**

গ সম্ভাবনার মাধ্যমে Probability tree হবে :



$\therefore$ লোকটির ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$ **(Ans.)**

চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড : 1 2 6**

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. **ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করলে, O বিন্দুকে বলা হয়–**
ⓚ লম্ববিন্দু ⓛ পরিকেন্দ্র ⓖ ভরকেন্দ্র ⓘ শীর্ষবিন্দু

২. **$1.8\dot{5}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ নিচের কোনটি?**
ⓚ $\frac{37}{20}$ ⓛ $\frac{167}{90}$ ⓖ $\frac{184}{99}$ ⓘ $\frac{167}{900}$

৩. **কোনো অসীম গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\frac{2}{3}$ হলে প্রথম পদ কত?**
ⓚ $-\frac{2}{3}$ ⓛ $-\frac{1}{3}$ ⓖ $\frac{2}{3}$ ⓘ $\frac{1}{3}$

৪. **নিচের কোন ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে?**
ⓚ $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{16}{27}-\frac{64}{81}+\dots\dots$ ⓛ $\frac{1}{4}-\frac{5}{16}+\frac{25}{64}-\frac{125}{256}+\dots\dots$
ⓖ $\frac{3}{4}-\frac{9}{16}+\frac{27}{64}-\frac{81}{256}+\dots\dots$ ⓘ $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{9}{8}-\frac{27}{16}+\dots\dots$

৫. **কোনো ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয়মান কত?**
ⓚ $\frac{\pi^c}{12}$ ⓛ $\frac{\pi^c}{4}$ ⓖ $\frac{\pi^c}{3}$ ⓘ $\frac{5\pi^c}{12}$

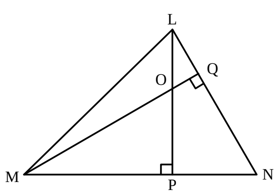
৬. **$-1038°$ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?**
ⓚ ১ম ⓛ ২য় ⓖ ৩য় ⓘ ৪র্থ

৭. **x^4-2x^2+3x কে $(x+2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?**
ⓚ 18 ⓛ 14 ⓖ 2 ⓘ -14

৮. **$3x^2-7x-6$ এর উৎপাদক হচ্ছে–**
i. $x-3$ ii. $3x-2$ iii. $3x+2$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৯. **$P(x, y, z) = x^3+y^3+z^3+3xyz$ হলে, $P(1, -1, 2)$ এর মান কত?**
ⓚ 12 ⓛ 6 ⓖ 4 ⓘ 2

□ **নিচের চিত্রের আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



চিত্রে LN = 4 সেমি, PN = 2 সেমি এবং MN = 6 সেমি

১০. **NL এর উপর MN এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?**
ⓚ MQ ⓛ PL ⓖ QL ⓘ QN

১১. **ML এর মান কত?**
ⓚ $2\sqrt{7}$ সে.মি. ⓛ $4\sqrt{7}$ সে.মি. ⓖ 28 সে.মি. ⓘ 76 সে.মি.

১২. **কোনো ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ 6 সে. মি. হলে, ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস কত সে. মি. হবে?**
ⓚ 3 সে. মি. ⓛ 6 সে. মি. ⓖ 12 সে. মি. ⓘ 24 সে. মি.

১৩. **$\left(1-\frac{x}{2}\right)^6$ এর বিস্তৃতির ক্ষেত্রে–**
i. পদসংখ্যা = 7 ii. x^4 এর সহগ = $-\frac{15}{16}$
iii. x^3 এর সহগ = $-\frac{5}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৪. **(2, 3) এবং (t, 5) বিন্দুগামী রেখাদ্বয়ের ঢাল – 2 হলে, t এর মান কত?**
ⓚ 3 ⓛ 2 ⓖ 1 ⓘ -1

১৫. **(3, 3) এবং (4, 4) বিন্দুগামী রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে?**
ⓚ 45° ⓛ 48° ⓖ 60° ⓘ 135°

১৬. **(7, – 6) এবং (– 9, – 4) বিন্দুগামী রেখার ঢাল কত?**
ⓚ -8 ⓛ $-\frac{1}{8}$ ⓖ 5 ⓘ 8

১৭. **একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনায় মৌলিক সংখ্যা এবং বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?**
ⓚ 1 ⓛ $\frac{2}{3}$ ⓖ $\frac{1}{2}$ ⓘ $\frac{1}{3}$

□ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৮ ও ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো।

১৮. **কমপক্ষে একটি T পাওয়ার সম্ভাবনা কত?**
ⓚ $\frac{3}{4}$ ⓛ $\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{1}{4}$ ⓘ $\frac{1}{8}$

১৯. **একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা কত?**
ⓚ $\frac{3}{8}$ ⓛ $\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{3}{4}$ ⓘ $\frac{7}{8}$

২০. **$\tan\theta = -\frac{5}{12}$ এবং $\tan\theta$, $\sin\theta$ একই চিহ্নযুক্ত হলে, $\sec\theta$ এর মান কত?**
ⓚ $\frac{13}{5}$ ⓛ $\frac{13}{12}$ ⓖ $-\frac{13}{12}$ ⓘ $-\frac{13}{5}$

২১. **$2^{2x+3}-2^{x+2} = 112$ হলে, x এর মান কত?**
ⓚ 4 ⓛ $\frac{7}{2}$ ⓖ 2 ⓘ $-\frac{7}{2}$

২২. **$a^4 = b^3 = c^2 = 64$ হলে–**
i. $a = \pm 2\sqrt{2}$ ii. $b = \pm 4$ iii. $c = \pm 8$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

২৩. **$\log_{2\sqrt{5}}400$? এর মান কত?**
ⓚ 2 ⓛ 4 ⓖ 6 ⓘ 8

২৪. **$\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত?**
ⓚ -40 ⓛ -10 ⓖ 10 ⓘ 40

২৫. **${}^9C_2 =$ কত?**
ⓚ 36 ⓛ 27 ⓖ 18 ⓘ 12

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৩

০৩ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $P(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} + \frac{1}{64z^3}$ এবং $g(x) = (x + 1)(x^2 + 2)$

ক. g(x) এর মাত্রা ও মুখ্য সহগের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x, y, z) = \frac{3}{8xyz}$ হলে প্রমাণ কর যে, $4yz + 2zx + xy = 0$ অথবা $x = 2y = 4z$. ৪

গ. $\frac{x^2}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। (i) $1 + \frac{1}{3x - 5} + \frac{1}{(3x - 5)^2} + \frac{1}{(3x - 5)^3} + \ldots \ldots \ldots$

(ii) $6 + 66 + 666 + \ldots \ldots \ldots$

ক. $3.0\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. (ii) নং ধারার আলোকে প্রমাণ কর যে, ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি $\frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$. ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩। $M = (1 + x)^8$ এবং $N = (1 - x)^7$

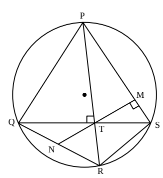
ক. $(1 - 2x)^4$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. MN এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. $(3 - x)$ M কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃতি করে উহার সাহায্যে $2.99 \times (1.01)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



ক. একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধি 24 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, QN = RN. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $TM^2 = PM.SM$. ৪

৫। ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু A(6, 3), B (– 6, 4), C (– 4, – 3) এবং D (5, k) যেখানে $k < 0$ এবং O মূলবিন্দু।

ক. দেখাও যে, AC রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. AB রেখা y-অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করলে CP এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ΔAOB এর ক্ষেত্রফলের চারগুণ হলে k-এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬। P (4, 4), Q (5, – 3), R (– 4, – 6) এবং S (– 5, 3) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

ক. R বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. PR এবং QS কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. PQRS চতুর্ভুজের যে অংশ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $a = \sec\theta - \tan\theta$ যেখানে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ক. 10 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে $32°$ কোণ উৎপন্ন করে, তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1 - a}{1 + a}$. ৪

গ. $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮। (i) তিনটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) 14 টি টিকেটে 16 থেকে 29 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. একটি ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং এর আলোকে Probability tree অঙ্কন করে কমপক্ষে দুইটি টেল (T) আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, টিকেটটির ক্রমিক নম্বর মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা, 4 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনার সমান। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	গ	২	খ	৩	ঘ	৪	গ	৫	ঘ	৬	ক	৭	গ	৮	খ	৯	ঘ	১০	ঘ	১১	ক	১২	ঘ	১৩	খ
	১৪	গ	১৫	ক	১৬	খ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	খ	২০	খ	২১	গ	২২	খ	২৩	খ	২৪	ঘ	২৫	ক		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▸ ০১ $P(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} + \frac{1}{64z^3}$ এবং $g(x) = (x + 1)(x^2 + 2)$

ক. $g(x)$ এর মাত্রা ও মুখ্য সহগের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x, y, z) = \frac{3}{8xyz}$ হলে প্রমাণ কর যে, $4yz + 2zx + xy = 0$ অথবা $x = 2y = 4z$. ৪

গ. $\frac{x^2}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = (x + 1)(x^2 + 2)$
$= x^3 + x^2 + 2x + 2$

$\therefore$ $g(x)$ এর মাত্রা 3 এবং মুখ্য সহগ 1

$\therefore$ $g(x)$ এর মাত্রা ও মুখ্য সহগের সমষ্টি $= 3 + 1 = 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} + \frac{1}{64z^3}$

আবার, $P(x, y, z) = \frac{3}{8xyz}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} + \frac{1}{64z^3} = \frac{3}{8xyz}$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{2y}\right)^3 + \left(\frac{1}{4z}\right)^3 - 3.\frac{1}{x}.\frac{1}{2y}.\frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{4z}\right)^2 + \left(\frac{1}{4z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{4yz + 2zx + xy}{4xyz} = 0$

$\therefore 4yz + 2zx + xy = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{4z}\right)^2 + \left(\frac{1}{4z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

কতকগুলো বর্গের যোগফল শূন্য হলে তার প্রত্যেকটির মান আলাদাভাবে শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2y}$

$\therefore x = 2y$

আবার, $\left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{4z}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{2y} = \frac{1}{4z}$

$\therefore 2y = 4z$

অতএব, $x = 2y = 4z$

$\therefore 4yz + 2zx + xy = 0$ অথবা, $x = 2y = 4z$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = (x + 1)(x^2 + 2)$

$\therefore \frac{x^2}{g(x)} = \frac{x^2}{(x + 1)(x^2 + 2)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x + 1)(x^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x + 1)$ ... ... (ii)

বা, $x^2 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Bx + Cx + C$

বা, $x^2 = (A + B)x^2 + (B + C)x + 2A + C$ ... ... (iii)

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$1 = A\{(-1)^2 + 2\}$

বা, $1 = 3A$ $\therefore A = \frac{1}{3}$

(iii) নং এর উভয়পক্ষে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 1$

বা, $B = 1 - A$

$\therefore B = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

এবং $B + C = 0$

$\therefore C = -B = -\frac{2}{3}$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{g(x)} \equiv \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{2}{3}x + \left(-\frac{2}{3}\right)}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{3(x + 1)} + \frac{\frac{2x - 2}{3}}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{3(x + 1)} + \frac{2(x - 1)}{3(x^2 + 2)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▸ ০২ (i) $1 + \frac{1}{3x - 5} + \frac{1}{(3x - 5)^2} + \frac{1}{(3x - 5)^3} + \dots \dots \dots$

(ii) $6 + 66 + 666 + \dots \dots \dots$

ক. $3.0\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. (ii) নং ধারার আলোকে প্রমাণ কর যে, ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি $\frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$. ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3.0\dot{2} = 3.022222 \dots \dots$
$= 3 + (0.02 + 0.002 + 0.0002 + \dots \dots)$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা, যার ১ম পদ, $a = 0.02$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.002}{0.02} = 0.1 < 1$

$$\therefore 3.0\dot{2} = 3 + \frac{a}{1 - r}$$

$$= 3 + \frac{0.02}{1 - 0.1}$$

$$= 3 + \frac{0.02}{0.9}$$

$$= 3 + \frac{2}{90}$$

$$= \frac{136}{45}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদীয় ভগ্নাংশ $\frac{136}{45}$ **(Ans.)**

খ ধারাটি, $6 + 66 + 666 + ...$

মনে করি, $S = 6 + 66 + 666 + ...$ n পদ পর্যন্ত

বা, $S = 6 (1 + 11 + 111 + ...$ n পদ পর্যন্ত)

বা, $\frac{S}{6} = 1 + 11 + 111 + ...$ n পদ পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = 9 + 99 + 999 + ...$ n পদ পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...$ n পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ...$ n পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = 10 + 10^2 + 10^3 + ...$ n পদ পর্যন্ত $- n$

বা, $\frac{9S}{6} = 10 (1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) - n$

বা, $S = \frac{60}{9} (1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) - \frac{6n}{9}$

বা, $S = \frac{60}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{6n}{9}$

বা, $S = \frac{20 (10^n - 1)}{27} - \frac{2n}{3}$

বা, $S = \frac{2}{3} \left\{ \frac{10}{9} (10^n - 1) - n \right\}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি $= \frac{2}{3} \left\{ \frac{10}{9} (10^n - 1) - n \right\}$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রদত্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারাটি :

$1 + \frac{1}{3x - 5} + \frac{1}{(3x - 5)^2} + \frac{1}{(3x - 5)^3} + ...$

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ, $p = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3x - 5}}{1} = \frac{1}{3x - 5}$

ধারাটিতে অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x - 5}\right| < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3x - 5} < 1$

হয়, $-1 < \frac{1}{3x - 5}$

বা, $-1 > 3x - 5$

বা, $-1 + 5 > 3x$

বা, $4 > 3x$

$\therefore x < \frac{4}{3}$

অথবা, $\frac{1}{3x - 5} < 1$

বা, $3x - 5 > 1$

বা, $3x > 1 + 5$

$\therefore x > 2$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{p}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3x - 5}}$

$= \frac{1}{\frac{3x - 5 - 1}{3x - 5}} = \frac{3x - 5}{3x - 6}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < \frac{4}{3}$ এবং $x > 2$ এবং সমষ্টি $\frac{3x - 5}{3x - 6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৩ $M = (1 + x)^8$ এবং $N = (1 - x)^7$

ক. $(1 - 2x)^4$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. MN এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. $(3 - x)$ M কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃতি করে উহার সাহায্যে $2.99 \times (1.01)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$(1 - 2x)^4 = 1 + 4(-2x) + 6(-2x)^2 + 4(-2x)^3 + 1(-2x)^4$
$= 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলোর সমষ্টি $= 1 - 8 + 24 - 32 + 16$
$= 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = (1 + x)^8$ ও $N = (1 - x)^7$

$\therefore MN = (1 + x)^8(1 - x)^7 = (1 + x)(1 + x)^7(1 - x)^7$
$= (1 + x)\{(1 + x)(1 - x)\}^7 = (1 + x)(1 - x^2)^7$

এখন,

$MN = (1 + x) \left[\binom{7}{0}(-x^2)^0 + \binom{7}{1}(-x^2)^1 + \binom{7}{2}(-x^2)^2 + \binom{7}{3}(-x^2)^3 + ... \right]$

$= (1 + x)(1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + ...)$

$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + ...) + (x - 7x^3 + 21x^5 - 35x^7 + ...)$

$= 1 + x - 7x^2 - 7x^3 + 21x^4 + 21x^5 - 35x^6 - 35x^7 + ...$

$\therefore$ MN এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ $- 35$. **(Ans.)**

গ এখানে, $(3 - x)M = (3 - x)(1 + x)^8$

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$(3 - x)(1 + x)^8 = (3 - x)[1 + {}^8C_1.x + {}^8C_2x^2 + {}^8C_3x^3 + ...]$

$= (3 - x)[1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + ...]$

$= (3 + 24x + 84x^2 + 168x^3 + ...) + (- x - 8x^2 - 28x^3 - 56x^4 - ... ...)$

$= 3 + 23x + 76x^2 + 140x^3 + ...$

এখন, $3 - x = 2.99$

বা, $x = 3 - 2.99 \quad \therefore x = 0.01$

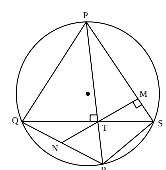
এখন, উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.01$ বসিয়ে পাই,

$(3 - 0.01)(1 + 0.01)^8 = 3 + 23 \times (0.01) + 76(0.01)^2 + 140 \times (0.01)^3 + ...$

বা, $2.99 \times (1.01)^8 = 3 + 0.23 + 0.0076 + 0.00014 + ...$
$= 3.23774$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 3.23774 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৪



ক. একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধি 24 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, QN = RN. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $TM^2 = PM.SM$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, পরিবৃত্তের পরিধি = 24 সে.মি.

অর্থাৎ, $2\pi r = 24$ [r = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $r = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{\pi}$

আমরা জানি, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেক।

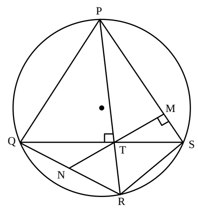
$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2} \times \frac{12}{\pi}$ সে.মি. $= \frac{6}{\pi}$ সে.মি.

$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times \left(\frac{6}{\pi}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= \pi \times \frac{36}{\pi^2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{36}{\pi}$ বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

খ



মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত QPSR চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় QS ও PR পরস্পরকে লম্বভাবে T বিন্দুতে ছেদ করে। T হতে PS বাহুর উপর TM লম্ব এবং বর্ধিত MT বিপরীত QR বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ করতে হবে যে, QN = RN.

প্রমাণ : একই চাপ SR এর উপর দণ্ডায়মান বলে $\angle SPR = \angle SQR$

অর্থাৎ, $\angle SPT = \angle TQN$

আবার, $\angle SPT = \angle STM$ [উভয়ে একই $\angle PTM$ এর পূরক কোণ বলে]

সুতরাং $\angle TQN = \angle NTQ$

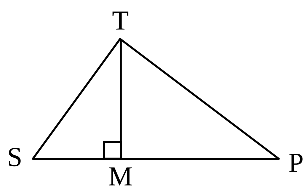
ফলে ΔQNT ত্রিভুজে QN = NT

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\angle NRT = \angle PST = \angle PTM = \angle RTN$

ফলে, RNT ত্রিভুজে RN = NT

সুতরাং QN = RN. **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, ΔTSP-এ $\angle STP = 90°$ এবং $TM \perp SP$। প্রমাণ করতে হবে যে, $TM^2 = PM.SM$

প্রমাণ : $\angle STP = 90°$

$\therefore \angle STM + \angle MTP = 90°$ ... ... (i)

আবার, $TM \perp SP$ বলে,

$\angle TMS = \angle TMP = 90°$

ΔSTM-এ, $\angle TMS + \angle STM + \angle TSM = 180°$

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $90° + \angle STM + \angle TSM = 180$ [$\because \angle TMS = 90°$]

বা, $\angle STM + \angle TSM = 90°$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\angle STM + \angle MTP = \angle STM + \angle TSM$

$\therefore \angle MTP = \angle TSM$

ΔTSM ও ΔTPM-এ

$\angle TMS = \angle TMP$, $\angle TSM = \angle MTP$

অবশিষ্ট $\angle STM$ = অবশিষ্ট $\angle TPM$

$\therefore \Delta TSM$ ও ΔTPM সদৃশ

$\therefore \frac{ST}{TP} = \frac{TM}{PM} = \frac{SM}{TM}$

অর্থাৎ, $\frac{TM}{PM} = \frac{SM}{TM}$

$\therefore TM^2 = PM.SM$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫ ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু A(6, 3), B (– 6, 4), C (– 4, – 3) এবং D (5, k) যেখানে k < 0 এবং O মূলবিন্দু।

ক. দেখাও যে, AC রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. AB রেখা y-অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করলে CP এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ΔAOB এর ক্ষেত্রফলের চারগুণ হলে k-এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(6, 3) ও C(– 4, – 3)

$\therefore$ AC রেখার ঢাল $= \frac{-3-3}{-4-6} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$

আমরা জানি, কোনো সরলরেখার ঢাল ধনাত্মক হলে রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

যেহেতু (3, – 5) এবং (6, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল 3। সুতরাং, রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, A(6, 3), B(– 6, 4) এবং C(– 4, – 3)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-6}{6-(-6)} = \frac{y-3}{3-4}$

বা, $\frac{x-6}{12} = \frac{y-3}{-1}$

বা, $12y - 36 = -x + 6$

বা, $x + 12y = 6 + 36$

$\therefore x + 12y = 42$

AB রেখা y-অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করলে P বিন্দুর ভুজ, x = 0

অর্থাৎ, $0 + 12y = 42$

বা, $y = \frac{42}{12}$

$\therefore y = \frac{7}{2}$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{7}{2}\right)$

$\therefore CP = \sqrt{(0+4)^2 + \left(\frac{7}{2}+3\right)^2}$

$= \sqrt{16 + \left(\frac{7+6}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{16 + \left(\frac{13}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{16 + \frac{169}{4}}$

$= \sqrt{\frac{64+169}{4}}$

$= \sqrt{\frac{233}{4}}$

$= \frac{\sqrt{233}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{\sqrt{233}}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, A(6, 3), B(– 6, 4), C(– 4, – 3) এবং D(5, k)

আবার, O(0, 0) মূলবিন্দু।

$\therefore \Delta AOB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|-18-24|$ "

$= \frac{1}{2} \times |-42|$ "

$= \frac{1}{2} \times 42$ বর্গএকক

= 21 বর্গএকক

□ABCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & -6 & -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & -3 & k & 3 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}|24 + 18 - 4k + 15 + 18 + 16 + 15 - 6k|$ "

$= \frac{1}{2}|106 - 10k|$ "

প্রশ্নমতে, □ABCD এর ক্ষেত্রফল = $4 \times \Delta AOB$ এর ক্ষেত্রফল

বা, $\frac{1}{2}|106 - 10k| = 21 \times 4$

বা, $|106 - 10k| = 168$

বা, $106 - 10k = \pm 168$

অর্থাৎ, $106 - 10k = 168$

বা, $-10k = 168 - 106$

বা, $k = \frac{-62}{10}$

$\therefore k = -\frac{31}{5}$

অথবা, $106 - 10k = -168$

বা, $-10k = -168 - 106$

বা, $-10k = -274$

বা, $k = \frac{-274}{-10}$

$\therefore k = \frac{137}{5}$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $k < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k = -\frac{31}{5}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ P (4, 4), Q (5, – 3), R (– 4, – 6) এবং S (– 5, 3) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

ক. R বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. PR এবং QS কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. PQRS চতুর্ভুজের যে অংশ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, R(– 4, – 6)

আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী ও m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore$ (– 4, – 6) বিন্দুগামী ও 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y - (-6) = 3\{x - (-4)\}$

বা, $y + 6 = 3(x + 4)$

বা, $y + 6 = 3x + 12$

$\therefore 3x - y + 6 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, P(4, 4), Q(5, – 3), R(– 4, – 6) ও S(– 5, 3) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

$\therefore$ PR রেখার সমীকরণ : $\frac{y-4}{4-(-6)} = \frac{x-4}{4-(-4)}$

বা, $\frac{y-4}{4+6} = \frac{x-4}{4+4}$ বা, $\frac{y-4}{10} = \frac{x-4}{8}$

বা, $10x - 40 = 8y - 32$ বা, $10x - 8y - 40 + 32 = 0$

বা, $10x - 8y - 8 = 0$ বা, $5x - 4y - 4 = 0$ ... ... (i)

ও QS রেখার সমীকরণ : $\frac{y-(-3)}{-3-3} = \frac{x-5}{5-(-5)}$

বা, $\frac{y+3}{-6} = \frac{x-5}{5+5}$

বা, $\frac{y+3}{-6} = \frac{x-5}{10}$

বা, $10y + 30 = -6x + 30$

বা, $6x + 10y + 30 - 30 = 0$

বা, $3x + 5y = 0$ ... ... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে,

$\frac{x}{(-4)\times 0 - (-4)\times 5} = \frac{y}{(-4)\times 3 - 0\times 5} = \frac{1}{5\times 5 - (-4)\times 3}$

বা, $\frac{x}{0+20} = \frac{y}{-12-0} = \frac{1}{25+12}$

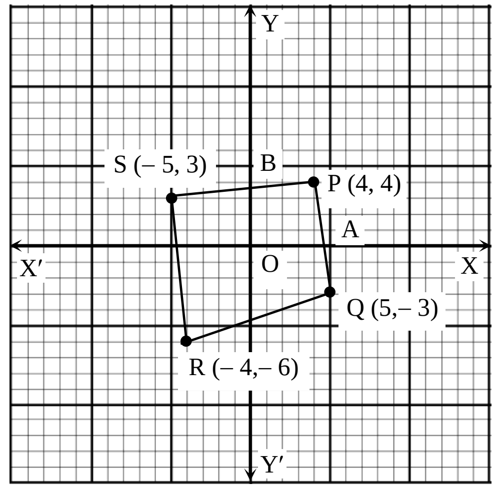
বা, $\frac{x}{20} = \frac{y}{-12} = \frac{1}{37}$

$\therefore \frac{x}{20} = \frac{1}{37}$ আবার, $\frac{y}{-12} = \frac{1}{37}$

বা, $x = \frac{20}{37}$ বা, $y = \frac{-12}{37}$

$\therefore$ PR ও QS কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{20}{37}, -\frac{12}{37}\right)$. **(Ans.)**

গ মনে করি, PQRS চতুর্ভুজের PQ ও PS রেখাদ্বয় X ও Y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।



এখন, PQ রেখার সমীকরণ : $\frac{x-4}{4-5} = \frac{y-4}{4-(-3)}$

বা, $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-4}{7}$

বা, $7x - 28 = -y + 4$

বা, $7x + y = 32$

এবং PS রেখার সমীকরণ : $\frac{x-4}{4-(-5)} = \frac{y-4}{4-3}$

বা, $\frac{x-4}{9} = \frac{y-4}{1}$

বা, $x - 4 = 9y - 36$

বা, $x - 9y = -32$

যেহেতু PQ রেখা x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাই A বিন্দুর কোটি $y = 0$

$\therefore 7x + 0 = 32$

বা, $x = \frac{32}{7}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{32}{7}, 0\right)$

আবার, যেহেতু PS রেখা Y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তাই B বিন্দুর ভুজ $x = 0$

$\therefore 0 - 9y = -32$

বা, $9y = 32$

$\therefore y = \frac{32}{9}$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{32}{9}\right)$.

এখানে, PQRS চতুর্ভুজের PBOA অংশ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করছে।

$\therefore$ PBOA এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & \frac{32}{7} & 4 \\ 4 & \frac{32}{9} & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left|\frac{128}{9} + 0 + 0 + \frac{128}{7} - 0 - 0 - 0 - 0\right|$ ”

$= \frac{1}{2}\left(\frac{896 + 1152}{63}\right)$ ”

$= \frac{1}{2} \times \frac{2048}{63}$ ”

$= \frac{1024}{63}$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $a = \sec\theta - \tan\theta$ যেখানে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ক. 10 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 32° কোণ উৎপন্ন করে, তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1-a}{1+a}$. ৪

গ. $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাস = 10 সে.মি.

∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{10}{2}$ সে.মি. = 5 সে.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 32° = \frac{32 \times \pi}{180} = 0.5585$ রেডিয়ান

∴ চাপের দৈর্ঘ্য, $s = r\theta = 5 \times 0.5585$ সে.মি. = 2.7925 সে.মি. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = \sec\theta - \tan\theta$

∴ ডানপক্ষ $= \frac{1-a}{1+a} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{1 + \sec\theta - \tan\theta}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta + 1 - \sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\cos\theta + 1 - \sin\theta} = \frac{\sin\theta(\cot\theta - \text{cosec}\theta + 1)}{\sin\theta(\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1)}$$

$$= \frac{\cot\theta - \text{cosec}\theta + 1}{\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1}$$

$$= \frac{(\cot\theta - \text{cosec}\theta) + (\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1}$$

$$= \frac{(\cot\theta - \text{cosec}\theta) + (\text{cosec}\theta + \cot\theta)(\text{cosec}\theta - \cot\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1}$$

$$= \frac{(\text{cosec}\theta - \cot\theta)(-1 + \text{cosec}\theta + \cot\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1}$$

$$= \frac{(\text{cosec}\theta - \cot\theta)(\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1)}{(\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1)} = \text{cosec}\theta - \cot\theta$$

= বামপক্ষ

∴ $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1-a}{1+a}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sec\theta - \tan\theta = a$

এবং $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\sec\theta - \sqrt{3}\tan\theta = 1$

বা, $\sqrt{3}\sec\theta = 1 + \sqrt{3}\tan\theta$

বা, $(\sqrt{3}\sec\theta)^2 = (1 + \sqrt{3}\tan\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $3\sec^2\theta = 1 + 2\sqrt{3}\tan\theta + 3\tan^2\theta$

বা, $3 + 3\tan^2\theta = 1 + 2\sqrt{3}\tan\theta + 3\tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$

বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{6}$. $\left[\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ (i) তিনটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো।

(ii) 14 টি টিকেটে 16 থেকে 29 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া আছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. একটি ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং এর আলোকে Probability tree অঙ্কন করে কমপক্ষে দুইটি টেল (T) আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, টিকেটটির ক্রমিক নম্বর মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা, 4 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনার সমান। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে,

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 6টি।

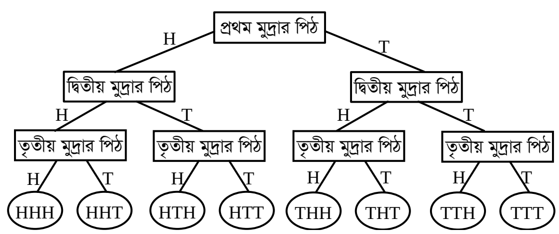
বিজোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা = 4টি।

যথা : 1, 3, 5, 6

∴ বিজোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

খ প্রথমে মুদ্রা তিনটিকে তিন ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি এবং প্রতি ধাপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যায় :



∴ নমুনা ক্ষেত্রটি হবে :

{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

∴ মোট নমুনাবিন্দু = 8টি।

∴ কমপক্ষে 2টি টেল (T) পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো :

HTT, THT, TTH, TTT অর্থাৎ, 4টি।

∴ কমপক্ষে 2টি টেল (T) পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

গ টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হবে : 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

এখানে, মৌলিক সংখ্যাগুলো : 17, 19, 23, 29.

∴ টিকেটটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.

4 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো : 16, 20, 24, 28.

∴ টিকেটটির নম্বর 4 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.

অতএব, টিকেটটির ক্রমিক নম্বর মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা, 4 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনার সমান। **(দেখানো হলো)**

সিলেট বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) — বিষয় কোড : 1 2 6

সময় : ২৫ মিনিট — [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] — পূর্ণমান : ২৫

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. $n = 5$ এর জন্য প্যাসকেলের সূত্রের বিস্তৃতির ৪র্থ (T_{3+1}) পদের সহগ কত?
ⓚ $\binom{5}{2}$ ⓚh $\binom{5}{3}$ ⓖ $\binom{5}{4}$ ⓖh $\binom{5}{5}$

২. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ হলে –
i. $0! = 0$ ii. $\binom{5}{2} = 10$ iii. $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

৩. $1 + 0.1 + 0.01 + \dots \dots \dots \infty$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
ⓚ $\frac{10}{9}$ ⓚh $\frac{9}{10}$ ⓖ $\frac{-9}{10}$ ⓖh $\frac{-10}{9}$

৪. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{27}, \frac{7}{81}, \dots\dots\dots\dots$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ নিচের কোনটি?
ⓚ $\frac{1}{3^n}$ ⓚh $\frac{2n-1}{3^n}$ ⓖ $\frac{2n-1}{3n}$ ⓖh $\frac{n}{3^n}$

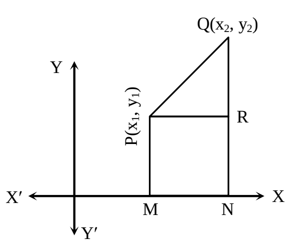
৫. H ও T পিঠবিশিষ্ট একটি মুদ্রা পরপর তিনবার নিক্ষেপে–
i. একই ফলাফল আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$
ii. বড়জোর ২টি H আসার সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$
iii. মোট নমুনা বিন্দু ৪টি
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh ii ও iii ⓖ i ও iii ⓖh i, ii ও iii

৬. $F(x) = 3ax^2 - ax + 5$ এ মুখ্য সহগ নিচের কোনটি?
ⓚ 3 ⓚh 5 ⓖ 3a ⓖh a

৭. $2\cos A = \sqrt{2}$ হলে $\tan 3A$ এর মান নিচের কোনটি?
ⓚ 1 ⓚh $\frac{1}{2}$ ⓖ $-\frac{1}{2}$ ⓖh -1

৮. একটি ত্রিভুজের নবিবিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?
ⓚ 25π ⓚh 100π ⓖ 200π ⓖh 400π

৯.



i. PR এর লম্ব অভিক্ষেপ x অক্ষের উপর $x_2 - x_1$
ii. $QR = y_2 - y_1$
iii. $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

১০. সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 6 একক, 7 একক এবং 8 একক হলে অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?
ⓚ 9.00 ⓚh 9.97 (প্রায়) ⓖ 14.28 (প্রায়) ⓖh 14.95 (প্রায়)

১১. $x + 3y + 5 = 0$ এবং $mx + y + 6 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে m এর মান নিচের কোনটি হবে?
ⓚ -3 ⓚh $-\frac{1}{3}$ ⓖ $\frac{1}{3}$ ⓖh 3

১২. কোনো অনুক্রমের $U_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ হলে, U_{20} = কত?
ⓚ 2 ⓚh 1 ⓖ 0 ⓖh -1

১৩. $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ এর মান কত?
ⓚ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⓚh $-\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{1}{2}$ ⓖh $\frac{2}{\sqrt{3}}$

১৪. $p^x = y$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ $p = \log_x y$ ⓚh $x = \log_p y$ ⓖ $x = \log_y p$ ⓖh $y = \log_p x$

১৫. $\frac{4x-3}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ হলে (A, B) = কত?
ⓚ (1, 3) ⓚh (3, 1) ⓖ (1, – 3) ⓖh (– 1, 3)

১৬. $\sqrt[15]{x^{10}\sqrt{x^8\sqrt{x^4}}}$ এর সরলমান কোনটি?
ⓚ x^{15} ⓚh x ⓖ $\sqrt[15]{x}$ ⓖh 1

১৭. $x + y = 2$ সরলরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ তৈরি করে, তার পরিমাণ কত?
ⓚ 45° ⓚh 60° ⓖ 120° ⓖh 135°

১৮. A(3, 0) এবং B(0, – 3) বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?
ⓚ $y = x - 3$ ⓚh $y = -x + 3$ ⓖ $y = -x + 6$ ⓖh $y = x - 6$

১৯. $\log_2 \log_2 2^{2^{2^{2^3}}}$ = কত?
ⓚ 64 ⓚh 27 ⓖ 8 ⓖh 3
[বি.দ্র.: সঠিক উত্তর : 256]

☐ **নিচের উদ্দীপকটি পড়ো ২৩-২৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
$\operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{3}$ এবং $\cos\theta > 0$.

২০. i. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ii. $\sec\theta = \frac{5}{4}$ iii. $\cot^2\theta = \frac{16}{9}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

২১. 'θ' এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?
ⓚ প্রথম ⓚh দ্বিতীয় ⓖ তৃতীয় ⓖh চতুর্থ

২২. – 300° কোণটি কোন চতুর্ভাগে থাকবে?
ⓚ প্রথম ⓚh দ্বিতীয় ⓖ তৃতীয় ⓖh চতুর্থ

☐ **নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ২৩, ২৪ ও ২৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**
একটি বাক্সে লাল বল 12টি, সাদা বল 16টি এবং কালো বল 24টি। দৈবভাবে 1টি বল নেওয়া হলো–

২৩. বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ⓚ $\frac{1}{52}$ ⓚh $\frac{3}{13}$ ⓖ $\frac{4}{13}$ ⓖh $\frac{5}{13}$

২৪. বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ⓚ $\frac{3}{13}$ ⓚh $\frac{4}{13}$ ⓖ $\frac{7}{13}$ ⓖh $\frac{10}{13}$

২৫. বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ⓚ $\frac{12}{13}$ ⓚh $\frac{7}{13}$ ⓖ $\frac{5}{13}$ ⓖh $\frac{3}{13}$

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

সিলেট বোর্ড-২০২৩

০৩ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$ একটি বহুপদী এবং $Q(x) = \frac{2x^4}{x^4 - 16}$

ক. $A(p, q, r)$ চক্রক্রমিক এবং সমমাত্রিক কিনা যাচাই কর। ২

খ. $A(p, q, r) = pqr$ হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$ ৪

গ. $Q(x)$- কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $A = 9 + 99 + 999 + ...$ এবং

$S = (5x - 3)^{-1} + (5x - 3)^{-2} + (5x - 3)^{-3} + ...$ দুইটি অসীম ধারা।

ক. $x = 1$ হলে, S ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে S ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩। $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$; $p \geq 0$ এবং $f(x) = \ln \frac{6 + x}{6 - x}$

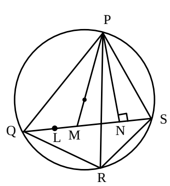
ক. $\sqrt{y^8\sqrt{y^6\sqrt{y^4}}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $7p^3 + 21p = 48$. ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



চিত্রে L, QM এর মধ্যবিন্দু এবং QM = MN = NS.

ক. PQ = 6 সে.মি. QM = 4 সে.মি. এবং PM = 5 সে.মি. হলে PL এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS ৪

৫। A(4, 5), B(– 6, 3), C(– 8, – 5) এবং D(k, – 3) বিন্দু চারটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক. দেখাও যে, A ও B বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. P(x, y) বিন্দুটি A ও B বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $5x + y + 1 = 0$ ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 81 বর্গ একক হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬। $y = 3x + 4$ রেখাটি x-অক্ষকে P, $3x + y = 10$ রেখাটি y-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে এবং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু R.

ক. $(a^2, 2)$, $(a, 1)$ এবং $(0, 0)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে, a এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ২

খ. R বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. A(5, 3) হলে, ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $\cot\theta + \text{coseccθ} = P$ এবং $x \cos A - y \sin A = z$.

ক. $40°21'20''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. P = 2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$. ৪

গ. যদি $x = 3$, $y = -2 \sin A$ এবং $z = 0$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < A < 2\pi$. ৪

৮। ঘটনা-ক : একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হলো।

ঘটনা-খ : একটি ঝুড়িতে 15টি লাল, 17টি সাদা এবং 18টি কালো বল আছে। দৈবক্রমে একটি বল নেওয়া হলো।

ক. ঘটনা-ক এর probability tree অঙ্কন কর। ২

খ. ঘটনা-খ হতে বলটি– ৪

(i) কালো হওয়ার এবং

(ii) লাল না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে 4টি বল তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	খ	২	গ	৩	ক	৪	খ	৫	গ	৬	গ	৭	ঘ	৮	ঘ	৯	ঘ	১০	খ	১১	ক	১২	গ	১৩	ক
	১৪	খ	১৫	ক	১৬	খ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	*	২০	গ	২১	ঘ	২২	ক	২৩	গ	২৪	ঘ	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▸ ০১ $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$ একটি বহুপদী এবং $Q(x) = \frac{2x^4}{x^4 - 16}$

ক. A (p, q, r) চক্রক্রমিক এবং সমমাত্রিক কিনা যাচাই কর। ২

খ. $A(p, q, r) = pqr$ হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$ ৪

গ. Q(x)- কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$

এখন, $p = q$, $q = r$ এবং $r = p$ বসিয়ে পাই,

$A(q, r, p) = (q + r + p)(qr + rp + pq)$

$= (p + q + r)(pq + qr + rp)$

$= A(p, q, r)$

$\therefore A(p, q, r) = A(q, r, p)$

∴ রাশিটি চক্রক্রমিক।

আবার, $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$

$= p^2q + pqr + p^2r + pq^2 + q^2r + pqr + pqr + qr^2 + pr^2$

রাশিটি সমমাত্রিক কেননা প্রত্যেকটি পদের মাত্রা একই অর্থাৎ, 3।

খ দেওয়া আছে, $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$

এবং $A(p, q, r) = pqr$

বা, $(p + q + r)(pq + qr + rp) = pqr$

বা, $(p + q + r)(pq + qr + rp) - pqr = 0$

বা, $p^2q + pqr + rp^2 + pq^2 + q^2r + pqr + pqr + qr^2 + r^2p - pqr = 0$

বা, $p^2q + pqr + rp^2 + pq^2 + q^2r + pqr + qr^2 + r^2p = 0$

বা, $p^2q + pq^2 + pqr + q^2r + rp^2 + pqr + r^2p + qr^2 = 0$

বা, $pq(p + q) + qr(p + q) + rp(p + q) + r^2(p + q) = 0$

বা, $(p + q)(pq + qr + rp + r^2) = 0$

বা, $(p + q)\{q(r + p) + r(r + p)\} = 0$

বা, $(p + q)(q + r)(r + p) = 0$

$\therefore p = -q$ অথবা, $q = -r$ অথবা, $r = -p$

$p = -q$ হলে,

বামপক্ষ $= \frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{(-q + q + r)^5} = \frac{1}{r^5}$

ডানপক্ষ $= \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{(-q)^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r^5}$

$\therefore \frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{2x^4}{x^4 - 16}$

$= \frac{2(x^4 - 16) + 32}{x^4 - 16} = 2 + \frac{32}{x^4 - 16} = 2 + \frac{32}{(x^2)^2 - 4^2}$

$= 2 + \frac{32}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}$

ধরি, $\frac{32}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$

উভয়পক্ষকে $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$32 \equiv A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x - 2)(x + 2)$

বা, $32 = x^3A + 2x^2A + 4xA + 8A + x^3B - 2x^2B + 4xB - 8B + x^3C + x^2D - 4xC - 4D$

বা, $32 = x^3A + x^3B + x^3C + 2x^2A - 2x^2B + x^2D + 4xA + 4xB - 4xC + 8A - 8B - 4D$

বা, $32 = x^3(A + B + C) + x^2(2A - 2B + D) + x(4A + 4B - 4C) + 8A - 8B - 4D.$

উভয়পক্ষ থেকে সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$A + B + C = 0$

$2A - 2B + D = 0$

$4A + 4B - 4C = 0$

$8A - 8B - 4D = 32$

সমীকরণগুলো সমাধান করে পাই, $A = 1, B = -1, C = 0$ ও $D = -4$

$\therefore \frac{32}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)} \equiv \frac{1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 2} + \frac{-4}{x^2 + 4}$

$= \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} - \frac{4}{x^2 + 4}$

$\therefore Q(x) = 2 + \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} - \frac{4}{x^2 + 4}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▸ ০২ $A = 9 + 99 + 999 + ...$ এবং $S = (5x - 3)^{-1} + (5x - 3)^{-2} + (5x - 3)^{-3} + ...$ দুইটি অসীম ধারা।

ক. $x = 1$ হলে, S ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে S ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $S = (5x - 3)^{-1} + (5x - 3)^{-2} + (5x - 3)^{-3} + ...$

$x = 1$ হলে, $S = (5.1 - 3)^{-1} + (5.1 - 3)^{-2} + (5.1 - 3)^{-3} + ...$

$= (5 - 3)^{-1} + (5 - 3)^{-2} + (5 - 3)^{-3} + ...$

$= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ...$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$

∴ ধারাটির সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{2^2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ $A = 9 + 99 + 999 + ...n$ পদ পর্যন্ত

$= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...n$ পদ পর্যন্ত।

$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ...n$ পদ পর্যন্ত

$= 10 + 10^2 + 10^3 + ...n$ পদ পর্যন্ত $- n$

$= 10(1 + 10 + 10^2 + ...+ 10^{n-1}) - n$

$= 10\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n$

$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

∴ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{10}{9}(10^n - 1) - n$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$S = (5x-3)^{-1} + (5x-3)^{-2} + (5x-3)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{5x-3} + \frac{1}{(5x-3)^2} + \frac{1}{(5x-3)^3} + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{5x-3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(5x-3)^2} \div \frac{1}{5x-3}$

$= \frac{1}{(5x-3)^2} \times (5x-3) = \frac{1}{5x-3}$

প্রদত্ত ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে যদি, $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{5x-3} < 1$

এখন, $-1 < \frac{1}{5x-3}$

বা, $5x - 3 < -1$

বা, $5x < -1 + 3$ [উভয়পক্ষে 3 যোগ করে]

বা, $5x < 2$

বা, $x < \frac{2}{5}$ [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

আবার, $\frac{1}{5x-3} < 1$

বা, $1 < 5x - 3$

বা, $5x - 3 > 1$

বা, $5x > 1 + 3$ [উভয়পক্ষে 3 যোগ করে]

বা, $5x > 4$

বা, $x > \frac{4}{5}$ [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

∴ প্রদত্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{5x-3}}{1 - \frac{1}{5x-3}}$

$= \frac{\frac{1}{5x-3}}{\frac{5x-3-1}{5x-3}} = \frac{\frac{1}{5x-3}}{\frac{5x-4}{5x-3}}$

$= \frac{1}{5x-3} \times \frac{5x-3}{5x-4} = \frac{1}{5x-4}$

∴ নির্ণেয় শর্ত : $x < \frac{2}{5}$ অথবা, $x > \frac{4}{5}$ এবং সমষ্টি $= \frac{1}{5x-4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$; $p \geq 0$ এবং $f(x) = \ln\frac{6+x}{6-x}$

ক. $\sqrt{y^8\sqrt{y^6\sqrt{y^4}}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $7p^3 + 21p = 48$. ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

<u>৩নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক $\sqrt{y^8\sqrt{y^6\sqrt{y^4}}}$

$= \sqrt{y^8\sqrt{y^6.y^2}}$

$= \sqrt{y^8\sqrt{y^8}}$

$= \sqrt{y^8.y^4}$

$= \sqrt{y^{12}}$

$= y^6$

∴ নির্ণেয় মান y^6. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

বা, $p^2 + 2 = \sqrt[3]{7^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

বা, $p^2 + 2 = 7^{\frac{2}{3}} + 7^{-\frac{2}{3}}$

বা, $p^2 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}} + \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p^2 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $p^3 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $p^3 = 7 - 7^{-1} - 3.p$

বা, $p^3 = 7 - \frac{1}{7} - 3p$

বা, $p^3 = \frac{49 - 1 - 21p}{7}$

বা, $7p^3 = 48 - 21p$

∴ $7p^3 + 21p = 48$ **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{6+x}{6-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

∴ $\frac{6+x}{6-x} > 0$ যদি (i) $6 + x > 0$ এবং $6 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $6 + x < 0$ এবং $6 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই,

$x > -6$ এবং $-x > -6$

বা, $x > -6$ এবং $x < 6$

∴ ডোমেন $= \{x : -6 < x\} \cap \{x : x < 6\}$

$= (-6, \infty) \cap (-\infty, 6)$

$= (-6, 6)$

(ii) নং হতে পাই,

$x < -6$ এবং $-x < -6$

বা, $x < -6$ এবং $x > 6$

∴ ডোমেন $= \{x : x < -6\} \cap \{x : x > 6\} = \varnothing$

∴ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-6, 6) \cup \varnothing$

$= (-6, 6)$

রেঞ্জ : $y = f(x) = ln\frac{6+x}{6-x}$

বা, $e^y = \frac{6+x}{6-x}$

বা, $6 + x = 6e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 6(e^y - 1)$

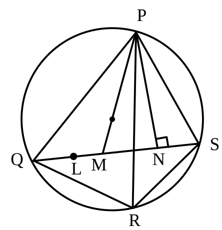
বা, $x = \frac{6(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

∴ নির্ণেয় ডোমেন $D_f = (-6, 6)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৪



চিত্রে L, QM এর মধ্যবিন্দু এবং QM = MN = NS.

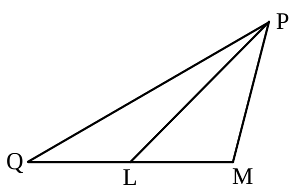
ক. PQ = 6 সে.মি. QM = 4 সে.মি. এবং PM = 5 সে.মি. হলে PL এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, PQ = 6 সে.মি., QM = 4 সে.মি.
এবং PM = 5 সে.মি.



যেহেতু L, QM এর মধ্যবিন্দু

সুতরাং, $QL = \frac{1}{2} QM = \frac{1}{2} \times 4$ সে.মি. = 2 সে.মি.

ΔPQM এ অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$PQ^2 + PM^2 = 2(PL^2 + QL^2)$

বা, $(6)^2 + (5)^2 = 2(PL^2 + 2^2)$

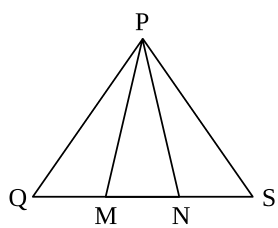
বা, $36 + 25 = 2PL^2 + 8$

বা, $2PL^2 = 53$

বা, $PL^2 = \frac{53}{2}$

$\therefore PL = \sqrt{\frac{53}{2}} = 5.15$ সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, PQS ত্রিভুজের QS বাহু M ও N বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PS^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$.

প্রমাণ : ΔPQN-এ QM = MN [অঙ্কনানুসারে]

তাহলে, PM, ΔPQN-এর মধ্যমা যা QN কে M বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore PQ^2 + PN^2 = 2PM^2 + 2MN^2$....................................(i)

আবার, PN, ΔPMS এর মধ্যমা যা MS কে N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore PS^2 + PM^2 = 2PN^2 + 2MN^2$ ....(ii)

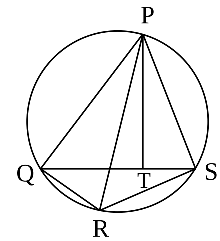
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PS^2 + PN^2 + PM^2 = 2PM^2 + 2PN^2 + 4MN^2$

বা, $PQ^2 + PS^2 = 2PM^2 + 2PN^2 + 4MN^2 - PN^2 - PM^2$

$\therefore PQ^2 + PS^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$. **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটি কর্ণ। PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS।

অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$ এর সমান করে $\angle SPT$ আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle QPR = \angle SPT$

বা, $\angle QPR + \angle RPT = \angle SPT + \angle RPT$ [$\angle RPT$ যোগ করে]

$\therefore \angle QPT = \angle RPS$

এখন, ΔPQT ও ΔPRS এর মধ্যে

$\angle QPT = \angle RPS$, $\angle PQS = \angle PRS$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore \Delta PQT$ ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ PR . QT = PQ . RS .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPTS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPT$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = \angle PST$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PTS$

$\therefore \Delta PQR$ ও ΔPTS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$

বা, PR . ST = QR . PS .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

PR . QT + PR . ST = PQ . RS + QR . PS

বা, PR (QT + ST) = PQ . RS + QR . PS

$\therefore$ PR . QS = PQ . RS + QR . PS [$\because$ QT + ST = QS]

$\therefore$ PR . QS = PQ . RS + QR . PS. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫ A(4, 5), B(– 6, 3), C(– 8, – 5) এবং D(k, – 3) বিন্দু চারটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক. দেখাও যে, A ও B বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. P(x, y) বিন্দুটি A ও B বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, 5x + y + 1 = 0 ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 81 বর্গ একক হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(4, 5) ও B(– 6, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল,

$m = \frac{3-5}{-6-4} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$; যা ধনাত্মক

$\therefore$ A(4, 5) ও B(– 6, 3) বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

খ শর্তানুসারে, P(x, y) বিন্দু থেকে A(4, 5) বিন্দুর দূরত্ব = P(x, y) বিন্দু থেকে B(– 6, 3) বিন্দুর দূরত্ব

বা, $\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x+6)^2+(y-3)^2}$

বা, $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = x^2 + 12x + 36 + y^2 - 6y + 9$

বা, $x^2 - 8x + y^2 - 10y + 41 - x^2 - 12x - y^2 + 6y - 45 = 0$

বা, $-20x - 4y - 4 = 0$

বা, $-4(5x + y + 1) = 0$

$\therefore 5x + y + 1 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, A(4, 5), B(– 6, 3), C(– 8, – 5) এবং D(k, – 3)

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -6 & -8 & k & 4 \\ 5 & 3 & -5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|12 + 30 + 24 + 5k + 30 + 24 + 5k + 12|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}(10k + 132)$ বর্গএকক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}(10k + 132) = 81$

বা, $10k + 132 = 162$

বা, $10k = 162 - 132$

বা, $10k = 30 \quad \therefore k = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান k = 3. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ y = 3x + 4 রেখাটি x-অক্ষকে P, 3x + y = 10 রেখাটি y-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে এবং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু R.

ক. $(a^2, 2)$, (a, 1) এবং (0, 0) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে, a এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ২

খ. R বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. A(5, 3) হলে, ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $D(a^2, 2)$, E(a, 1) ও F(0, 0) তিনটি বিন্দু।

$\therefore$ DE রেখার ঢাল $= \frac{1-2}{a-a^2}$

$= \frac{-1}{-a(a-1)} = \frac{1}{a(a-1)}$

এবং EF রেখার ঢাল $= \frac{0-1}{0-a} = \frac{1}{a}$

যেহেতু D, E ও F বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ DE রেখার ঢাল = EF রেখার ঢাল

বা, $\frac{1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}$

বা, $a^2 - a = a$

বা, $a^2 - 2a = 0$

বা, $a(a-2) = 0$

$\therefore a = 0, 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, y = 3x + 4 ... ... (i)

3x + y = 10 ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের সমাধানই হবে এদের ছেদবিন্দু R.

(i) নং এ y = 3x + 4 বসিয়ে পাই,

3x + 3x + 4 = 10

বা, $6x = 6 \therefore x = 1$

(i) নং সমীকরণে x = 1 বসিয়ে পাই, y = 3.1 + 4 = 3 + 4 = 7

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 7)

$\therefore$ R(1, 7) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 7 = 3(x - 1)$

বা, $y - 7 = 3x - 3$

$\therefore 3x - y + 4 = 0$ **(Ans.)**

গ y = 3x + 4 রেখাটি x অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করে,

সুতরাং রেখাটির কোটি y = 0 হবে,

$\therefore 0 = 3x + 4$

বা, $3x = -4$

বা, $x = -\frac{4}{3}$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

আবার, 3x + y = 10 রেখাটি y অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে,

সুতরাং রেখাটির ভুজ x = 0 হবে,

$\therefore y = 10$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক Q(0, 10)

দেওয়া আছে, A(5, 3)

$\therefore$ ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -\frac{4}{3} & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left|-\frac{40}{3} + \frac{12}{3} - 50\right|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left|\frac{-40 + 12 - 150}{3}\right|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left|\frac{-178}{3}\right|$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times \frac{178}{3}$ বর্গএকক

= 29.67 বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 29.67 বর্গএকক (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ cotθ + coseccθ = P এবং x cosA – y sinA = z.

ক. 40°21′20″ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. P = 2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$. ৪

গ. যদি x = 3, y = – 2 sinA এবং z = 0 হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < A < 2\pi$. ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $40°21'20'' = 40° + \left(\frac{21}{60}\right)^\circ + \left(\frac{20}{3600}\right)^\circ$

$= \left(40 + \frac{7}{20} + \frac{1}{180}\right)^\circ$

$= \left(\frac{7200 + 63 + 1}{180}\right)^\circ = \left(\frac{7264}{180}\right)^\circ$

$= \frac{7264}{180} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= 0.7043^c$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, p = 2

এবং cotθ + cosecθ = p

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = (2)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = 4$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = 4$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = 4$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = 4$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{4+1}{4-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{5}{3}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$

বা, $\sec\theta = \frac{5}{3}$

$\therefore \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1}$

$= \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \sqrt{\frac{25-9}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - 1}{\frac{4}{3} - \frac{5}{3} + 1}$

$= \frac{\frac{4+5-3}{3}}{\frac{4-5+3}{3}}$

$= \frac{6}{3} \times \frac{3}{2} = 3$

ডানপক্ষ $= \tan\theta + \sec\theta$

$= \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$

$\therefore \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = 3$, $y = -2\sin A$ এবং $z = 0$

এবং $x\cos A - y\sin A = z$

বা, $3\cos A - (-2\sin A)\sin A = 0$ [x, y, z এর মান বসিয়ে]

বা, $3\cos A + 2\sin^2 A = 0$

বা, $2\sin^2 A + 3\cos A = 0$

বা, $2(1 - \cos^2 A) + 3\cos A = 0$

বা, $2 - 2\cos^2 A + 3\cos A = 0$

বা, $-2\cos^2 A + 3\cos A + 2 = 0$

বা, $2\cos^2 A - 3\cos A - 2 = 0$

বা, $2\cos^2 A - 4\cos A + \cos A - 2 = 0$

বা, $2\cos A(\cos A - 2) + 1(\cos A - 2) = 0$

বা, $(\cos A - 2)(2\cos A + 1) = 0$

হয়, $\cos A - 2 = 0$

$\therefore \cos A = 2$ [গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ, $-1 \le \cos A \le 1$]

অথবা, $2\cos A + 1 = 0$

বা, $2\cos A = -1$

বা, $\cos A = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos A = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos A = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos A = \cos\frac{3\pi - \pi}{3}$ $\therefore$ $A = \frac{2\pi}{3}$

আবার, $\cos A = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos A = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos A = \cos\frac{4\pi}{3}$ $\therefore A = \frac{4\pi}{3}$

যেহেতু $0 < A < 2\pi$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $A = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ ঘটনা-ক : একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হলো।
ঘটনা-খ : একটি ঝুড়িতে 15টি লাল, 17টি সাদা এবং 18টি কালো বল আছে। দৈবক্রমে একটি বল নেওয়া হলো।

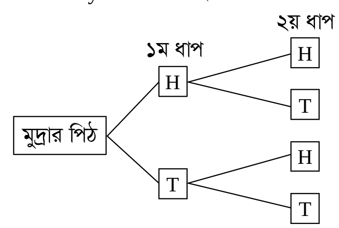
ক. ঘটনা-ক এর probability tree অঙ্কন কর। ২

খ. ঘটনা-খ হতে বলটি– ৪
(i) কালো হওয়ার এবং
(ii) লাল না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে 4টি বল তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপকে দুই ধাপ বিবেচনা করি। মুদ্রা নিক্ষেপের প্রতি ধাপে দুইটি ফলাফল {H, T} আসতে পারে। পরীক্ষার মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিচে দেখানো হলো :



খ দেওয়া আছে, লাল বল 15টি, সাদা বল 17টি ও কালো বল 18টি।

$\therefore$ ঝুড়িতে মোট বল $= (15 + 17 + 18)$টি $= 50$টি

(i) বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$ **(Ans.)**

(ii) বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

$\therefore$ বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ **(Ans.)**

গ ঝুড়িতে মোট বল 50টি এবং সাদা বল 17টি।

$\therefore$ একটি বল নেওয়া হলে তা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{17}{50}$।

যেহেতু বলটি প্রতিস্থাপন করা হচ্ছে না, তাই দ্বিতীয়বার বল নেওয়ার ক্ষেত্রে মোট বল 49টি এবং সাদা বল 16টি।

$\therefore$ দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{16}{49}$

একইভাবে, তৃতীয় ও চতুর্থ বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{15}{48}$ ও $\frac{14}{47}$

$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে পরপর চারটি বল নেওয়া হলে সবগুলো বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{17}{50} \times \frac{16}{49} \times \frac{15}{48} \times \frac{14}{47} = \frac{17}{1645}$ **(Ans.)**

বরিশাল বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] **পূর্ণমান : ২৫**

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. একটি মুদ্রাকে 5 বার নিক্ষেপ করা হলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা কত?
ⓚ 5 ⓚ 25 ⓖ 32 ⓖ 64

(ক) 5 (খ) 25 (গ) 32 (ঘ) 64

২. কোনো ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সেমি হলে, এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

(ক) 2 সেমি (খ) 4 সেমি (গ) 8 সেমি (ঘ) 16 সেমি

৩. 0.2 + 0.02 + 0.002 + ... অসীম গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

(ক) $\frac{2}{11}$ (খ) $\frac{2}{9}$ (গ) $\frac{9}{2}$ (ঘ) $\frac{11}{2}$

৪. (0, – 1) এবং (2, – 3) বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

(ক) $\sqrt{2}$ (খ) $2\sqrt{2}$ (গ) $2\sqrt{5}$ (ঘ) $\sqrt{26}$

৫. $P(x) = x^4(2 - 3x - mx^2)$ বহুপদীটির মুখ্যসহগ কত?

(ক) 2 (খ) – 3 (গ) m (ঘ) – m

৬. 3 – 3 + 3 – 3 + 3 – .... ধারাটির–

i. সাধারণ পদ $3(-1)^{n-1}$

ii. 15 তম পদ 3

iii. প্রথম 30 পদের সমষ্টি 0

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭. নিচের কোনটি P(x, y) এর সমমাত্রিক বহুপদী?

(ক) $a^2x + 2xy + c^2y$ (খ) $ax^2 + 2axy + c^2y$
(গ) $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (ঘ) $a^2x + 2abxy + c^2y^2$

৮. নিচের কোনটি $0.1\dot{4}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ?

(ক) $\frac{7}{45}$ (খ) $\frac{13}{90}$ (গ) $\frac{14}{99}$ (ঘ) $\frac{13}{99}$

৯. $\tan\left(\theta - \frac{13\pi}{2}\right)$ এর মান কত?

(ক) – cotθ (খ) – tanθ (গ) cotθ (ঘ) tanθ

১০. $\sqrt{3}y = 3x + 1$ সরলরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে?

(ক) 30° (খ) 60° (গ) 120° (ঘ) 150°

১১. আবহাওয়া দপ্তর থেকে পাওয়া রিপোর্ট অনুযায়ী জুলাই মাসে সিলেট শহরে 16 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে 12 জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{8}{15}$ (খ) $\frac{16}{31}$ (গ) $\frac{2}{5}$ (ঘ) $\frac{12}{31}$

১২. যদি m, n, x > 0 এবং m ≠ 1, n ≠ 1 হয়, তবে–

i. $2\log_{\sqrt{m}} m + 3\log_{\sqrt{n}} n = 5$

ii. $\log m + \log n - \log x = \log \frac{mn}{x}$

iii. $m^x = \sqrt[3]{m^2}$, যখন $x = \frac{2}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৩. – 375° কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

(ক) ১ম (খ) ২য় (গ) ৩য় (ঘ) ৪র্থ

১৪. $\sqrt{4^x} = \sqrt[4]{8^y}$ হলে, $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

(ক) $\frac{2}{3}$ (খ) $\frac{3}{4}$ (গ) $\frac{4}{3}$ (ঘ) $\frac{3}{2}$

১৫. $5^{\log_5 3^2}$ এর মান কত?

(ক) 2 (খ) 3 (গ) 5 (ঘ) 9

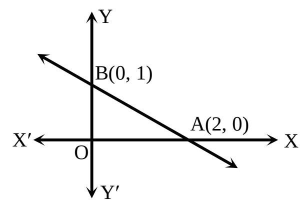
১৬. $\tan\theta = -\sqrt{3}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হলে, θ এর মান কত?

(ক) $\frac{5\pi}{3}$ (খ) $\frac{2\pi}{3}$ (গ) $\frac{\pi}{3}$ (ঘ) $-\frac{\pi}{3}$

১৭. $^5C_3$ = কত?

(ক) 10 (খ) 20 (গ) 40 (ঘ) 60

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১৮ ও ১৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**



১৮. AB রেখার ঢাল কত?

(ক) – 2 (খ) $\frac{-1}{2}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) 2

১৯. ΔOAB এর ক্ষেত্রফল কত?

(ক) 1 বর্গ একক (খ) $\frac{3}{2}$ বর্গ একক
(গ) 2 বর্গ একক (ঘ) 3 বর্গ একক

২০. $\log_{\sqrt{2}} 8$ এর মান কত?

(ক) 3 (খ) $4\sqrt{2}$ (গ) 6 (ঘ) $8\sqrt{2}$

২১. সম্ভাবনার সীমা কোনটি?

(ক) $0 < P < 1$ (খ) $0 < P \le 1$
(গ) $0 \le P \le 1$ (ঘ) $0 \le P < 1$

২২. x + y = 1 সরলরেখাটির–

i. ঢাল = – 1

ii. (1, 0) বিন্দু দিয়ে যায়

iii. y অক্ষের ছেদক 1

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ২৩ ও ২৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

$(1 - 4x + 4x^2)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 7.

২৩. n এর মান কত?

(ক) 3 (খ) 4 (গ) 6 (ঘ) 8

২৪. প্রদত্ত বিস্তৃতির ৪র্থ পদ কত?

(ক) $160x^2$ (খ) $60x^3$ (গ) $-60x^3$ (ঘ) $-160x^3$

২৫. ΔABC এ ∠ACB সূক্ষ্মকোণ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (খ) $AC^2 = AB^2 + BC^2$
(গ) $AB^2 > AC^2 + BC^2$ (ঘ) $AB^2 < AC^2 + BC^2$

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

বরিশাল বোর্ড-২০২৩

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান :** ৫০

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$ একটি বহুপদী।

ক. $x^3 + ax^2 + 2x + 1$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x + 1)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ কে $(x - m)$ এবং $(x - n)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n - 15 = 0$ ৪

গ. $\frac{x + 2}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $A\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ এবং $B = (1 - x)(1 + ax)^5$

ক. $(1 - 2y + y^2)^7$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে পঞ্চম পদের সহগ ষষ্ঠ পদের সহগের 5 গুণ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = 1 + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ হলে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩। (i) $m = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{x + y} - \sqrt[3]{x - y}\right\}$ এবং $x^2 - y^2 = z^3$

(ii) $n = \log(3 + 5x) - 2\log x$

ক. $a^2 + b^2 = 11ab$ হলে প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{a - b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. ২

খ. $n = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $2x - 5 = \sqrt{37}$ ৪

গ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $4m^3 + 3mz - y = 0$ ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

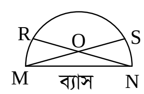
৪। ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M, N এবং O.

ক. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. হলে এর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

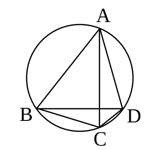
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AN^2 + BN^2)$. ৪

গ. যদি প্রদত্ত ত্রিভুজে $\angle ABC = 90°$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = \frac{2}{3}(AM^2 + BN^2 + CO^2)$. ৪

৫। নিচের চিত্র লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



চিত্র : ১



চিত্র : ২

ক. কোনো ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 7 সে. মি. হলে নববিন্দুবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. চিত্র ১ হতে প্রমাণ কর যে, $MN^2 = MS.OM + RN.ON$. ৪

গ. চিত্র ২ হতে প্রমাণ কর যে, $AC.BD - AB.CD = AD.BC$. ৪

৬। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো : $P(-5, -10)$, $Q(15, -8)$, $R(10, 5)$ ও $S(-10, 3)$.

ক. দেখাও যে, QR রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. PS রেখার সমান্তরাল এবং $(5, 18)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $x = \sin\theta$ এবং $y = \cos\theta$

ক. দেখাও যে, $\operatorname{cosec}^4\theta - \operatorname{cosec}^2\theta = \cot^4 + \cot^2\theta$. ২

খ. $15x^2 + 2y = 7$ এবং $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $2(y^2 - x^2) - 1 = 0$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর; যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৮। কোনো একটি লটারিতে 300টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। লাবণ্য 20টি, ফারিয়া 30টি এবং দ্বীনা 25টি টিকেট কিনেছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো :

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. লাবণ্য অথবা দ্বীনার প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর তিনটি টিকেট তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো টিকেট ফারিয়ার হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	গ	২	গ	৩	খ	৪	খ	৫	ঘ	৬	ঘ	৭	গ	৮	খ	৯	ক	১০	খ	১১	খ	১২	গ	১৩	ঘ
	১৪	খ	১৫	ঘ	১৬	খ	১৭	ক	১৮	খ	১৯	ক	২০	গ	২১	গ	২২	ঘ	২৩	ক	২৪	ঘ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$ একটি বহুপদী।

ক. $x^3 + ax^2 + 2x + 1$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x + 1)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ কে $(x - m)$ এবং $(x - n)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n - 15 = 0$ ৪

গ. $\frac{x + 2}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^3 + ax^2 + 2x + 1$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x + 1)$ হলে,

$f(-1) = 0$

বা, $(-1)^3 + a(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$

বা, $-1 + a - 2 + 1 = 0$

$\therefore a = 2.$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$

যেহেতু f(x) কে $(x - m)$ এবং $(x - n)$ দ্বারা ভাগ করলে উভয়ক্ষেত্রে একই ভাগশেষ থাকে।

সুতরাং, $f(m) = f(n)$

বা, $m^3 + 2m^2 - 15m = n^3 + 2n^2 - 15n$

বা, $m^3 - n^3 + 2m^2 - 2n^2 - 15m + 15n = 0$

বা, $(m - n)(m^2 + mn + n^2) + 2(m + n)(m - n) - 15(m - n) = 0$

বা, $(m - n)(m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n - 15) = 0$

হয়, $m - n = 0$ অথবা, $m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n - 15 = 0$

কিন্তু $m \neq n$.

$\therefore m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n - 15 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x = x(x^2 + 2x - 15) = x(x^2 + 5x - 3x - 15) = x\{x(x + 5) - 3(x + 5)\} = x(x + 5)(x - 3)$$

এখন, $\frac{x + 2}{f(x)} = \frac{x + 2}{x(x + 5)(x - 3)}$

ধরি, $\frac{x + 2}{x(x + 5)(x - 3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 5} + \frac{C}{x - 3}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x + 5)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 2 \equiv A(x + 5)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 5)$ .... (ii)

(ii) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 0, -5, 3$ বসিয়ে পাই,

$2 = A(5)(-3)$ $\therefore A = \frac{-2}{15}$

$-3 = B(-5)(-8)$ $\therefore B = \frac{-3}{40}$

$5 = C(3)(8)$ $\therefore C = \frac{5}{24}$

A, B ও C এর মান (i)নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x + 2}{x(x + 5)(x - 3)} \equiv \frac{-\frac{2}{15}}{x} + \frac{-\frac{3}{40}}{x + 5} + \frac{\frac{5}{24}}{x - 3}$$

$$= \frac{-2}{15x} - \frac{3}{40(x + 5)} + \frac{5}{24(x - 3)}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ $A\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ এবং $B = (1 - x)(1 + ax)^5$

ক. $(1 - 2y + y^2)^7$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে পঞ্চম পদের সহগ ষষ্ঠ পদের সহগের 5 গুণ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = 1 + bx^2 + cx^3 + ...$ হলে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1 - 2y + y^2)^7 = (y^2 - 2y + 1)^7$

$= \{(y - 1)^2\}^7 = (y - 1)^{14}$

$\therefore$ পদসংখ্যা $= 14 + 1 = 15$টি **(Ans.)**

খ $A = \left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ বিস্তৃতির, $r + 1$ তম পদ $= {}^nC_r\, 2^{n-r} . \left(\frac{x}{3}\right)^r$

$\therefore (4 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_4\, 2^{n-4} . \left(\frac{x}{3}\right)^4$

$(5 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_5\, 2^{n-5} . \left(\frac{x}{3}\right)^5$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_4\, 2^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 5 \times {}^nC_5\, 2^{n-5}\left(\frac{1}{3}\right)^5$

বা, $\frac{n!}{4!(n - 4)!} \times 2^{n-4-n+5} \times 3^{-4+5} = 5 \times \frac{n!}{5!(n - 5)!}$

বা, $\frac{2 \times 3}{4!(n - 4)(n - 5)!} = 5 \times \frac{1}{5 \times 4!(n - 5)!}$

বা, $\frac{6}{n - 4} = 1$

বা, $n - 4 = 6$

$\therefore n = 10$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = (1 - x)(1 + ax)^5$

$= (1 - x)\{1 + {}^5C_1(ax)^1 + {}^5C_2(ax)^2 + {}^5C_3(ax)^3 + ...\}$

$= (1 - x)(1 + 5ax + 10a^2x^2 + 10a^3x^3 + ...)$

$= (1 + 5ax + 10a^2x^2 + 10a^3x^3 + ...) - (x + 5ax^2 + 10a^2x^3 + 10a^3x^4 + ...)$

$= 1 + x(5a - 1) + x^2(10a^2 - 5a) + x^3(10a^3 - 10a^2) + ...$ (i)

প্রশ্নমতে, $B = 1 + bx^2 + cx^3 + ...$ (ii)

(i)নং ও (ii)নং এ সহগ সমীকৃত করে পাই, $5a - 1 = 0$

$\therefore a = \frac{1}{5}$

আবার, $10a^2 - 5a = b$

বা, $10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 5.\frac{1}{5} = b$ [a এর মান বসিয়ে]

বা, $10 \times \frac{1}{25} - 1 = b$

$\therefore b = -\frac{3}{5}$

এবং $10a^3 - 10a^2 = c$

বা, $10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 - 10\left(\frac{1}{5}\right)^2 = c$

বা, $\frac{10}{125} - \frac{10}{25} = c$ $\therefore c = \frac{-8}{25}$

$\therefore$ a, b, c এর মান যথাক্রমে $\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{8}{25}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ (i) $m = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{x+y} - \sqrt[3]{x-y}\right\}$ এবং $x^2 - y^2 = z^3$

(ii) $n = \log(3 + 5x) - 2\log x$

ক. $a^2 + b^2 = 11ab$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\log\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. ২

খ. $n = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $2x - 5 = \sqrt{37}$ ৪

গ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $4m^3 + 3mz - y = 0$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 11ab$

বা, $a^2 - 2ab + b^2 = 9ab$

বা, $(a - b)^2 = 9ab$

বা, $(a - b)^2 = (3\sqrt{ab})^2$

বা, $a - b = 3\sqrt{ab}$

বা, $\frac{a-b}{3} = (ab)^{\frac{1}{2}}$

বা, $\log\left(\frac{a-b}{3}\right) = \log (ab)^{\frac{1}{2}}$ [উভয়পক্ষে log নিয়ে]

$\therefore \log\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $n = \log(3 + 5x) - 2\log x$

বা, $\log(3 + 5x) - 2\log x = 0$ $[\because n = 0]$

বা, $\log(3 + 5x) - \log x^2 = \log 1$ $[\because \log 1 = 0]$

বা, $\log\left(\frac{3+5x}{x^2}\right) = \log 1$

বা, $\frac{3+5x}{x^2} = 1$

বা, $x^2 - 5x - 3 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

হয়, $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$ অথবা, $x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়।

বা, $2x = 5 + \sqrt{37}$

$\therefore$ $2x - 5 = \sqrt{37}$. **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $m = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{x+y} - \sqrt[3]{x-y}\right\}$ এবং $x^2 - y^2 = z^3$

এখন, $m = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{x+y} - \sqrt[3]{x-y}\right\}$

বা, $2m = (x + y)^{\frac{1}{3}} - (x - y)^{\frac{1}{3}}$

বা, $(2m)^3 = \left\{(x + y)^{\frac{1}{3}} - (x - y)^{\frac{1}{3}}\right\}$ [ঘন করে]

বা, $8m^3 = (x + y) - (x - y) - 3(x + y)^{\frac{1}{3}} . (x - y)^{\frac{1}{3}} \left\{(x + y)^{\frac{1}{3}} - (x - y)^{\frac{1}{3}}\right\}$

বা, $8m^3 = 2y - 3(x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}}.2m$

বা, $8m^3 = 2y - 3(z^3)^{\frac{1}{3}}.2m$

বা, $8m^3 = 2y - 6mz$

বা, $4m^3 = y - 3mz$

$\therefore$ $4m^3 + 3mz - y = 0$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৪ ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M, N এবং O.

ক. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. হলে এর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AN^2 + BN^2)$. ৪

গ. যদি প্রদত্ত ত্রিভুজে $\angle ABC = 90°$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$AC^2 = \frac{2}{3}(AM^2 + BN^2 + CO^2)$. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

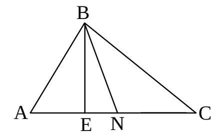
ক সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times$ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ

$= \sqrt{3} \times 4$ সে.মি.

$= 4\sqrt{3}$ সে.মি. **(Ans.)**

খ মনে করি, ΔABC এর BN মধ্যমা AC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AN^2 + BN^2)$.



অঙ্কন : B বিন্দু হতে $BE \perp AC$ আঁকি।

প্রমাণ : ΔBNC এর $\angle BNC$ স্থূলকোণ এবং CN রেখার উপর BN এর লম্ব অভিক্ষেপ EN।

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$BC^2 = BN^2 + CN^2 + 2CN.EN$ .... (i)

আবার, ΔBAN এর $\angle BNA$ সূক্ষ্মকোণ এবং AN রেখার উপর BN এর লম্ব অভিক্ষেপ EN।

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AB^2 = AN^2 + BN^2 - 2AN.EN$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

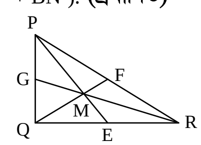
$AB^2 + BC^2 = BN^2 + CN^2 + 2CN.EN + BN^2 + AN^2 - 2AN.EN$

$= 2BN^2 + AN^2 + 2AN.EN + AN^2 - 2AN.EN$ $[\because AN = CN]$

$= 2BN^2 + 2AN^2$

$\therefore AB^2 + BC^2 = 2(AN^2 + BN^2)$. **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, ΔABC-এ AM, BN ও CO মধ্যমা তিনটি পরস্পর M বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করেছে এবং $\angle ABC = 90°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = \frac{2}{3}(AM^2 + BN^2 + CO^2)$

প্রমাণ : মনে করি, BC = a, AC = b, AB = c

এবং AM = d, BN = e, CO = f.

Δ ABC এর AM একটি মধ্যমা

$\therefore AC^2 + AB^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $b^2 + c^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\}$ $\left[\because BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a\right]$

$= 2d^2 + 2 \times \frac{1}{4}a^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}a^2$

বা, $2(b^2 + c^2) = 4d^2 + a^2$

বা, $4d^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$

$\therefore d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ ... ... (ii)

এবং, $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2b^2 + 2c^2 + 2a^2 - a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

বা, $4(AM^2 + BN^2 + CO^2) = 3(AC^2 + AB^2 + BC^2)$ ... ... (iv)

আবার, যেহেতু $\angle ABC$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AC

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ ... ... (v)

এখন, (iv) ও (v) নং হতে পাই,

$4(AM^2 + BN^2 + CO^2) = 3(AC^2 + AC^2)$

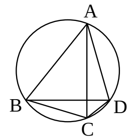
বা, $4(AM^2 + BN^2 + CO^2) = 3 \times 2AC^2$

বা, $4(AM^2 + BN^2 + CO^2) = 6AC^2$

$\therefore AC^2 = \frac{2}{3}(AM^2 + BN^2 + CO^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৫ নিচের চিত্র লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

চিত্র : ১



চিত্র : ২

ক. কোনো ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 7 সে. মি. হলে নববিন্দুবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. চিত্র ১ হতে প্রমাণ কর যে, $MN^2 = MS.OM + RN.ON$. ৪

গ. চিত্র ২ হতে প্রমাণ কর যে, $AC.BD - AB.CD = AD.BC$. ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

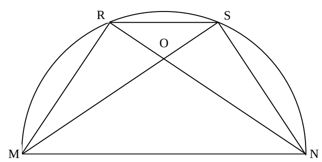
ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ $r = 7$ সে.মি.

$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{r}{2} = \frac{7}{2}$ সে.মি.

$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{49}{4}$

$= 38.48$ বর্গ সে.মি.। **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, MN ব্যাসের উপর MNSR একটি অর্ধবৃত্ত। MS ও NR জ্যাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে, $MN^2 = MS.OM + RN.ON$।

অঙ্কন : M, R; N, S ও S, R যোগ করি।

প্রমাণ : ΔSOR ও ΔOMN-এ

$\angle ORS = \angle OMN$ [একই চাপ NS-এর উপর অবস্থিত]

এবং $\angle ROS = \angle MON$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\frac{MO}{RO} = \frac{NO}{SO}$

বা, $MO.SO = NO.RO$

বা, $MO.SO + MO^2 = NO.RO + MO^2$ [উভয়পক্ষে MO^2 যোগ করে]

বা, $MO(SO + MO) = NO.RO + RO^2 + MR^2$

[MN ব্যাস বলে $\angle MRO = \angle MRN = 90°$]
$\therefore MO^2 = MR^2 + RO^2$]

বা, $MO.MS = RO(NO + RO) + MR^2$

বা, $MO.MS = RO.NR + MN^2 - NR^2$

[$\angle MRN = 90°$ বলে ΔMNR-এ $MN^2 = MR^2 + NR^2$ বা, $MR^2 = MN^2 - NR^2$]

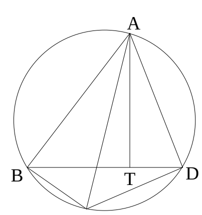
বা, $MO.MS = MN^2 - NR(NR - RO)$

বা, $MO.MS = MN^2 - NR.NO$

$\therefore MN^2 = MS.OM + RN.ON$ **(প্রমাণিত)**

গ এখানে, ABCD একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ।

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.



অঙ্কন : $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAT$ আঁকি যেন AT রেখা BD কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAC = \angle DAT$

বা, $\angle BAC + \angle CAT = \angle DAT + \angle CAT$ [$\angle CAT$ যোগ করে]

$\therefore \angle BAT = \angle CAD$

এখন, ΔABT ও ΔACD এর মধ্যে

$\angle BAT = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle ACD$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle ATB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore$ ΔABT ও ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ $AC . BT = AB . CD$ .... (i)

আবার, ΔABC ও ΔATD এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle DAT$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ACB = \angle ADT$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle ATD$

$\therefore$ ΔABC ও ΔATD সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$

বা, $AC . DT = BC . AD$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $AC . BT + AC . DT = AB . CD + BC . AD$

বা, $AC (BT + DT) = AB . CD + BC . AD$

বা, $AC . BD = AB . CD + BC . AD$ [$\because BT + DT = BD$]

$\therefore AC.BD - AB.CD = AD. BC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▸ ০৬ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো : $P(-5, -10)$, $Q(15, -8)$, $R(10, 5)$ ও $S(-10, 3)$.

ক. দেখাও যে, QR রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। ২

খ. PS রেখার সমান্তরাল এবং (5, 18) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্ভুজের যে অংশ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q(15, -8)$, $R(10, 5)$

QR রেখার ঢাল, $m = \frac{-8-5}{15-10} = \frac{-13}{5}$

আমরা জানি, কোনো রেখার ঢাল ঋণাত্মক হলে, রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ QR রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $P(-5, -10)$, $S(-10, 3)$

PS রেখার ঢাল $= \frac{-10-3}{-5+10} = \frac{-13}{5}$

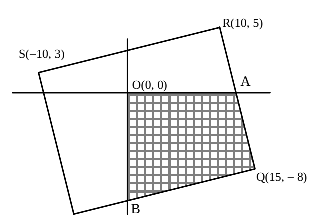
$\therefore$ (5, 18) বিন্দুগামী এবং $\frac{-13}{5}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$y - 18 = \frac{-13}{5}(x - 5)$ [$\because y - y_1 = m(x - x_1)$]

বা, $5y - 90 = -13x + 65$

$\therefore$ $13x + 5y - 155 = 0$. **(Ans.)**

গ



এখন, PQ রেখার সমীকরণ, $\frac{y+10}{-10+8} = \frac{x+5}{-5-15}$

বা, $\frac{y+10}{-2} = \frac{x+5}{-20}$

বা, $x + 5 = 10y + 100$

বা, $x - 10y - 95 = 0$

যেহেতু B বিন্দু Y অক্ষকে ছেদ করে সুতরাং B বিন্দুতে $x = 0$

অর্থাৎ, $-10y - 95 = 0$

$\therefore y = \frac{-19}{2} \quad \therefore B \equiv \left(0, \frac{-19}{2}\right)$

আবার, RQ রেখার সমীকরণ, $\frac{y+8}{-8-5} = \frac{x-15}{15-10}$

বা, $\frac{y+8}{-13} = \frac{x-15}{5}$

বা, $-13x + 195 = 5y + 40$

বা, $13x + 5y - 155 = 0$

যেহেতু, A বিন্দু x অক্ষকে ছেদ করে সুতরাং A বিন্দুতে $y = 0$

অর্থাৎ, $13x - 155 = 0$

বা, $x = \frac{155}{13} \quad \therefore A \equiv \left(\frac{155}{13}, 0\right)$

এখন, OBQA এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 15 & {}^{155}/_{13} & 0 \\ 0 & {}^{-19}/_{2} & -8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(15 \times \frac{19}{2}\right) + \left(8 \times \frac{155}{13}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{285}{2} + \frac{1240}{13}\right)$

$= 118.94$ বর্গ একক। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ $x = \sin\theta$ এবং $y = \cos\theta$

ক. দেখাও যে, $\text{cosec}^4\theta - \text{cosec}^2\theta = \cot^4 + \cot^2\theta.$ ২

খ. $15x^2 + 2y = 7$ এবং $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $2(y^2 - x^2) - 1 = 0$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর; যখন $0 < \theta < 2\pi.$ ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \text{cosec}^4\theta - \text{cosec}^2\theta$

$= (\text{cosec}^2\theta - 1)\,\text{cosec}^2\theta = \cot^2\theta(\text{cosec}^2\theta)$

$= \cot^2\theta\,(1 + \cot^2\theta) = \cot^4\theta + \cot^2\theta$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $x = \sin\theta$

$y = \cos\theta$

এখন, $15x^2 + 2y = 7$

বা, $15\sin^2\theta + 2\cos\theta = 7$

বা, $15(1 - \cos^2\theta) + 2\cos\theta - 7 = 0$

বা, $15 - 15\cos^2\theta + 2\cos\theta - 7 = 0$

বা, $15\cos^2\theta - 2\cos\theta - 8 = 0$

বা, $15\cos^2\theta - 12\cos\theta + 10\cos\theta - 8 = 0$

বা, $3\cos\theta(5\cos\theta - 4) + 2(5\cos\theta - 4) = 0$

বা, $(5\cos\theta - 4)(3\cos\theta + 2) = 0$

হয়, $5\cos\theta - 4 = 0$ অথবা, $3\cos\theta + 2 = 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$ বা, $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়।

বা, $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

বা, $1 - \sin^2\theta = \frac{16}{25}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{9}{25} \quad \therefore \sin\theta = \pm\frac{3}{5}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\pm\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{3}{4}$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{3}{4}$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $x = \sin\theta,\ y = \cos\theta$

$2(y^2 - x^2) - 1 = 0$

বা, $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 1 = 0$

বা, $2(1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta) - 1 = 0$

বা, $2 - 4\sin^2\theta - 1 = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 1 = 0$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\sin\theta$ ধনাত্মক (১ম ও ২য় চতুর্ভাগে)

১ম চতুর্ভাগে,

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

২য় চতুর্ভাগে,

$\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\theta = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

$\sin\theta$ ঋণাত্মক (৩য় ও ৪র্থ চতুর্ভাগে)

৩য় চতুর্ভাগে,

$\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}$

৪র্থ চতুর্ভাগে,

$\sin\theta = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ কোনো একটি লটারিতে 300টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। লাবণ্য 20টি, ফারিয়া 30টি এবং দ্বীনা 25টি টিকেট কিনেছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো :

ক. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ২

খ. লাবণ্য অথবা দ্বীনার প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর তিনটি টিকেট তুল নেওয়া হয়, তবে সবগুলো টিকেট ফারিয়ার হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

মোট নমুনা বিন্দু = 6টি

ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল = 3টি

যথা : 1, 3, 5

$\therefore$ ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. **(Ans.)**

খ এখানে, সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 300

লাবণ্য টিকেট কিনেছে = 20টি

অর্থাৎ, লাবণ্যের ১ম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভবনা $= \frac{20}{300}$

আবার, দ্বীনা টিকেট কিনেছে = 25টি

অর্থাৎ দ্বীনার ১ম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভবনা $\frac{25}{300}$

$\therefore$ লাবণ্য অথবা দ্বীনার ১ম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভবনা $= \frac{20}{300} + \frac{25}{300} = \frac{45}{300}$

$= \frac{3}{20}$. **(Ans.)**

গ মোট টিকেট সংখ্যা = 300

ফারিয়া টিকেট কিনেছে = 30টি

$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে পরপর 3টি টিকেট তুললে সবগুলো টিকেট ফারিয়ার হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{30}{300} \times \frac{29}{299} \times \frac{28}{298}$

$= \frac{203}{222755}$. **(Ans.)**

দিনাজপুর বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা) | বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট | [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] | পূর্ণমান : ২৫

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. **$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ বহুপদীর মুখ্য সহগ কত?**
ⓚ 8 ⓚ 3 ⓖ 2 ⓖ – 7

(ক) 8 (খ) 3 (গ) 2 (ঘ) -7

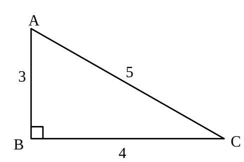
২. **একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলে, বড়জোর একটি T আসার সম্ভাবনা কত?**
(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{3}{8}$ (গ) $\frac{7}{8}$ (ঘ) $\frac{1}{8}$

৩. **$\cot\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে–**
i. $\sec\theta = \frac{-5}{3}$ ii. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{-8}{3}$
iii. $\text{cosec}\theta = \frac{-5}{4}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots\ldots\ldots$

৪. **ধারাটির 10 তম পদ কত?**
(ক) $-\frac{1}{2^{10}}$ (খ) $-\frac{1}{2^9}$ (গ) $\frac{1}{2^9}$ (ঘ) $\frac{1}{2^{10}}$

৫. **ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?**
(ক) $-\frac{3}{2}$ (খ) $-\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{3}{2}$

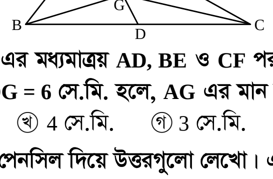
৬.


চিত্রে AB এর উপর BC এর লম্ব অভিক্ষেপ কত?
(ক) 0 একক (খ) 3 একক (গ) 4 একক (ঘ) 5 একক

৭. **$\cos A = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ হলে sinA এর মান কত?**
(ক) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (খ) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (গ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

৮. **$x \in R$ হলে, $\sqrt{x^2}$ = কত?**
(ক) x (খ) $-x$ (গ) $|x|$ (ঘ) $-|x|$

৯. **$n, r \in N$ হলে–**
i. ${}^nC_n = 1$ ii. ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ iii. ${}^nC_0 = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১০.


চিত্রে, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং DG = 6 সে.মি. হলে, AG এর মান কত?
(ক) 12 সে.মি. (খ) 4 সে.মি. (গ) 3 সে.মি. (ঘ) 2 সে.মি.

১১. **একটি থলেতে 5টা লাল, 10টা সাদা এবং 15টা কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেওয়া হলে, মার্বেলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?**
(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{5}{6}$

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ১২ ও ১৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
A(– 1, 1), B(2, 2) এবং C(3, – 3) যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষবিন্দু।

১২. **AB রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?**
(ক) $x - 3y + 4 = 0$ (খ) $x - 3y - 4 = 0$
(গ) $x + 3y - 4 = 0$ (ঘ) $x + 3y + 4 = 0$

১৩. **ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?**
(ক) 4 বর্গ একক (খ) 8 বর্গ একক
(গ) 10 বর্গ একক (ঘ) 16 বর্গ একক

১৪. **একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 1 : 2 : 3. বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয়মান কত?**
(ক) $\frac{\pi}{6}$ (খ) $\frac{\pi}{4}$ (গ) $\frac{\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{\pi}{2}$

১৫. **$\left(1 - \frac{x}{k}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ $-\frac{35}{27}$ হলে, k এর মান কত?**
(ক) – 35 (খ) – 3 (গ) 3 (ঘ) 35

১৬. **3x + y = 10 রেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক কত?**
(ক) (0, 10) (খ) (0, – 10) (গ) $\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$ (ঘ) $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

১৭. **P(a, b, c) = ab + bc + ca হলে–**
i. P(a, b, c) প্রতিসম রাশি ii. P(a, b, c) চক্রক্রমিক রাশি
iii. P(– 1, 0, 1) = 0
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৮. **$1.\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে কত হবে?**
(ক) $\frac{4}{3}$ (খ) $\frac{11}{9}$ (গ) $\frac{6}{5}$ (ঘ) $\frac{11}{10}$

১৯. **ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজের কী বলে?**
(ক) অন্তঃকেন্দ্র (খ) পরিকেন্দ্র (গ) ভরকেন্দ্র (ঘ) লম্ববিন্দু

২০. **y-অক্ষ থেকে A(– 2, – 3) বিন্দুর দূরত্ব কত?**
(ক) – 3 একক (খ) – 2 একক (গ) 2 একক (ঘ) 3 একক

২১. **$\log_{\sqrt{2}}3 \times \log_{\sqrt{3}}5 \times \log_{\sqrt{5}}2$ এর মান কত?**
(ক) $\sqrt{8}$ (খ) $\sqrt{30}$ (গ) 8 (ঘ) 30

☐ **নিচের তথ্যের আলোকে ২২ ও ২৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$P(x) = x^3 + x - a$

২২. **(x – 2), P(x) এর একটি উৎপাদক হলে, a এর মান কত?**
(ক) – 16 (খ) – 6 (গ) 8 (ঘ) 10

২৩. **a = 2 হলে, কোনটি P(x) এর একটি উৎপাদক?**
(ক) $x + 1$ (খ) $x + 2$ (গ) $x^2 + x - 2$ (ঘ) $x^2 + x + 2$

২৪. **একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি. হলে, ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত?**
(ক) 83.5 বর্গ সে.মি. (খ) 75.5 বর্গ সে.মি.
(গ) 47.5 বর্গ সে.মি. (ঘ) 37.5 বর্গ সে.মি.

২৫. **$(1 - x)^6$ এর বিস্তৃতিতে 8র্থ পদের সহগ কত?**
(ক) – 35 (খ) – 20 (গ) 42 (ঘ) 48

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

দিনাজপুর বোর্ড-২০২৩

০১ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল)

বিষয় কোড : 1 2 6

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। (i) $g(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2(x-3)}$

(ii) $p(y) = y^3 + y^2 + 4$

ক. দেখাও যে, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্রক্রমিক। ২

খ. p(y) কে (2y + m) এবং (2y + n) দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n = 0.$ ৪

গ. g(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। (i) $r^2 + \sqrt[3]{8} = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{-\frac{2}{3}}$

(ii) $a = 5 + \log_x(yz),\ b = 7 + \log_y(zx),\ c = 9 + \log_z(xy).$

ক. যদি $\log_{\sqrt{27}} m = 2\frac{2}{3}$ হয়, তবে m এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $5r^3 + 15r - 24 = 0.$ ৪

গ. (ii) নং হতে প্রমাণ কর যে, $(a-4)^{-1} + (b-6)^{-1} + (c-8)^{-1} = 1.$ ৪

৩। (i) $B = \left(r - \dfrac{y}{2}\right)^7$

(ii) $3(4 - 10x)^{-1} + 9(4 - 10x)^{-2} + 27(4 - 10x)^{-3} + \ldots\ldots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ক. গুণোত্তর ধারাটির সপ্তম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে r^3 এর সহগ 315 হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয়পূর্বক সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

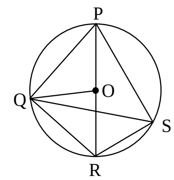
৪। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো P(– 5, 5), Q(– 15, – 5), R(5, – 5) এবং T(15, 5)।

ক. A(6, 8r) এবং B(5, r^2 – 2) বিন্দুগামী রেখার ঢাল 2 হলে, r এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্ভুজটির যে অংশ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৫।



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।

ক. $PE \perp QS$ হলে, PS এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $QP^2 + QR^2 = 2(OQ^2 + OP^2).$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS. ৪

৬। (i) $4x - 3y + 30 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

(ii) $3x + ry + 1 = 0$ রেখাটি (2, 1) বিন্দুগামী।

ক. $6x + 2y + 24 = 0$ রেখার y-অক্ষের ছেদক নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (ii) নং এ উল্লিখিত রেখার সমান্তরাল এবং (– 5, 3) বিন্দু দিয়ে যায়। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। (i) $\tan\alpha + \sec\alpha = A$

(ii) $F(\alpha) = \cos\alpha$

ক. $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ হলে, $\cot\beta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $F\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ হলে প্রমাণ কর যে, $y^2 - A^2 = 0.$ ৪

গ. $A = \sqrt{3}$ হলে, α এর মান নির্ণয় কর; যখন $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ৪

৮। একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. যদি শুধু ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হয়, তবে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত তা নির্ণয় কর। ২

খ. যদি মুদ্রা বাদে ছক্কাটি দুইবার নিক্ষেপ করা হয়, তবে নমুনাক্ষেত্র হতে একই ফলাফল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে Probability tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র হতে মুদ্রায় টেল ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	খ	২	ক	৩	খ	৪	গ	৫	খ	৬	ক	৭	গ	৮	গ	৯	ঘ	১০	ক	১১	ক	১২	ক	১৩	খ
	১৪	ঘ	১৫	গ	১৬	ঘ	১৭	ক	১৮	খ	১৯	খ	২০	গ	২১	গ	২২	ঘ	২৩	ঘ	২৪	ঘ	২৫	খ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ (i) $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)}$
(ii) $p(y) = y^3 + y^2 + 4$

ক. দেখাও যে, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্রক্রমিক। ২

খ. p(y) কে (2y + m) এবং (2y + n) দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n = 0.$ ৪

গ. g(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, প্রদত্ত রাশি = $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

প্রদত্ত রাশিটিতে a ও b এর পরস্পর স্থান বিনিময় করলে পাই, $\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$ যা প্রদত্ত রাশিটি থেকে ভিন্ন।

সুতরাং $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি প্রতিসম নয়।

এখন, প্রদত্ত রাশিটিতে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c স্থলে a বসিয়ে পাই,

$\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$ যা প্রদত্ত রাশি থেকে অভিন্ন।

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি চক্রক্রমিক।

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্র-ক্রমিক। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $p(y) = y^3 + y^2 + 4$

p(y) কে (2y + m) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$p\left(-\frac{m}{2}\right) = \left(-\frac{m}{2}\right)^3 + \left(-\frac{m}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{m^3}{8} + \frac{m^2}{4} + 4$

p(y) কে (2y + n) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$p\left(-\frac{n}{2}\right) = \left(-\frac{n}{2}\right)^3 + \left(-\frac{n}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{4} + 4$

প্রশ্নমতে, $-\frac{m^3}{8} + \frac{m^2}{4} + 4 = -\frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{4} + 4$

বা, $-\frac{m^3}{8} + \frac{m^2}{4} = -\frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{4}$

বা, $-m^3 + 2m^2 = -m^3 + 2n^2$ [উভয়পক্ষকে 8 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2m^2 - 2n^2 = m^3 - n^3$

বা, $2(m+n)(m-n) = (m-n)(m^2 + mn + n^2)$

বা, $2m + 2n = m^2 + mn + n^2$

[$\because m \neq n$, $(m-n) \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-3)}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)^2(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2$ .... (ii)

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে x = 1 বসিয়ে পাই, $1 = A.0 + B(-2) + C.0$

বা, $1 = -2B$ $\therefore B = -\frac{1}{2}$

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে x = 3 বসিয়ে পাই, $9 = A.0 + B.0 + C(2)^2$

বা, $9 = 4C$ $\therefore C = \frac{9}{4}$

আবার, (ii) নং হতে পাই,

$x^2 = A(x^2 - 4x + 3) + B(x-3) + C(x^2 - 2x + 1)$

বা, $x^2 = (A + C)x^2 + (-4A + B - 2C)x + 3A - 3B + C$

উভয়পক্ষের x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + C = 1$

$\therefore A = 1 - C = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$ $\left[\because C = \frac{9}{4}\right]$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $\frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)} \equiv \frac{-\frac{5}{4}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{9}{4}}{(x-3)}$

$\therefore g(x) = -\frac{5}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{9}{4(x-3)}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০২ (i) $r^2 + \sqrt[3]{8} = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{-\frac{2}{3}}$
(ii) $a = 5 + \log_x(yz)$, $b = 7 + \log_y(zx)$, $c = 9 + \log_z(xy)$.

ক. যদি $\log_{\sqrt{27}} m = 2\frac{2}{3}$ হয়, তবে m এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $5r^3 + 15r - 24 = 0.$ ৪

গ. (ii) নং হতে প্রমাণ কর যে, $(a-4)^{-1} + (b-6)^{-1} + (c-8)^{-1} = 1.$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_{\sqrt{27}} m = 2\frac{2}{3}$

বা, $\log_{\sqrt{27}} m = \frac{8}{3}$

বা, $m = (\sqrt{27})^{\frac{8}{3}}$ বা, $m = (\sqrt{3^3})^{\frac{8}{3}}$

বা, $m = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}$ বা, $m = 3^4$

$\therefore m = 81$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $r^2 + \sqrt[3]{8} = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{-\frac{2}{3}}$

বা, $r^2 + 2 = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{-\frac{2}{3}}$ $[\sqrt[3]{8} = 2]$

বা, $r^2 = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{-2}{3}} - 2$

বা, $r^2 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.5^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{-1}{3}} + \left(5^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $r^2 = \left(5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $r = 5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{-1}{3}}$ [বর্গমূল করে, $r \geq 0$]

বা, $r^3 = \left(5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{-1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে পাই]

বা, $r^3 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(5^{\frac{-1}{3}}\right)^3 - 3.5^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{-1}{3}}\left(5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{-1}{3}}\right)$

বা, $r^3 = 5^1 - 5^{-1} - 3.5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}(r)$ $[\because r = 5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{-1}{3}}]$

বা, $r^3 = 5 - \frac{1}{5} - 3r$ বা, $r^3 = \frac{25 - 1 - 15r}{5}$

বা, $5r^3 = 24 - 15r$

$\therefore 5r^3 + 15r - 24 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = 5 + \log_x(yz)$, $b = 7 + \log_y(2x)$,
$c = 9 + \log_z(xy)$

বামপক্ষ $= (a-4)^{-1} + (b-6)^{-1} + (c-8)^{-1}$

$$= \frac{1}{a-4} + \frac{1}{b-6} + \frac{1}{c-8}$$

$$= \frac{1}{5+\log_x(yz)-4} + \frac{1}{7+\log_y(zx)-6} + \frac{1}{9+\log_z(xy)-8}$$

$$= \frac{1}{\log_x(yz)+1} + \frac{1}{\log_y(zx)+1} + \frac{1}{\log_z(xy)+1}$$

$$= \frac{1}{\log_x(yz)+\log_x x} + \frac{1}{\log_y(zx)+\log_y y} + \frac{1}{\log_z(xy)+\log_z z}$$

$$= \frac{1}{\log_x xyz} + \frac{1}{\log_y xyz} + \frac{1}{\log_z xyz}$$

$$= \log_{xyz}x + \log_{xyz}y + \log_{xyz}z \quad \left[\therefore \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right]$$

$= \log_{xyz}xyz$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (a-4)^{-1} + (b-6)^{-1} + (c-8)^{-1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ (i) $B = \left(r - \frac{y}{2}\right)^7$

(ii) $3(4-10x)^{-1} + 9(4-10x)^{-2} + 27(4-10x)^{-3} + \dots \dots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ক. গুণোত্তর ধারাটির সপ্তম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে r^3 এর সহগ 315 হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয়পূর্বক সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটি,

$3(4-10x)^{-1} + 9(4-10x)^{-2} + 27(4-10x)^{-3} + \dots \dots$

$$= \frac{3}{4-10x} + \frac{9}{(4-10x)^2} + \frac{27}{(4-10x)^3} + \dots \dots$$

$$= \frac{3}{4-10x} + \left(\frac{3}{4-10x}\right)^2 + \left(\frac{3}{4-10x}\right)^2 + \left(\frac{3}{4-10x}\right)^3 + \dots \dots + \left(\frac{3}{4-10x}\right)^n + \dots \dots$$

অর্থাৎ, ধারাটির সাধারণ বা n তম পদ $\left(\frac{3}{4-10x}\right)^n$

$\therefore$ ধারাটির সপ্তম পদ $= \left(\frac{3}{4-10x}\right)^7$

$$= \frac{3^7}{(4-10x)^7}$$

$= 2187(4-10x)^{-7}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \left(r - \frac{y}{2}\right)^7$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(r - \frac{y}{2}\right)^7 = r^7 + {}^7C_1 r^{7-1}\left(-\frac{y}{2}\right)^1 + {}^7C_2 r^{7-2}\left(-\frac{y}{2}\right)^2 + {}^7C_3 r^{7-3}\left(-\frac{y}{2}\right)^3 + {}^7C_4 r^{7-4}\left(-\frac{y}{2}\right)^4 + \dots \dots$$

$$= r^7 - \frac{7r^6y}{2} + \frac{21r^5y^2}{4} - \frac{35r^4y^3}{8} + \frac{35r^3y^4}{16} - \dots \dots$$

প্রশ্নমতে, $\frac{35y^4}{16} = 315$

বা, $\frac{y^4}{16} = 9$

বা, $y^4 = 144$

বা, $(y^2)^2 = 12^2$

বা, $y^2 = 12$

$\therefore y = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{4 \times 3} = \pm 2\sqrt{3}$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারাটি,

$3(4-10x)^{-1} + 9(4-10x)^{-2} + 27(4-10x)^{-3} + \dots \dots$

$$= \frac{3}{4-10x} + \frac{9}{(4-10x)^2} + \frac{27}{(4-10x)^3} + \dots \dots$$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{3}{4-10x}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{9}{(4-10x)^2} \div \frac{3}{4-10x}$

$$= \frac{9}{(4-10x)^2} \times \frac{(4-10x)}{3}$$

$$= \frac{3}{4-10x}$$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ, $\left|\frac{3}{4-10x}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{3}{4-10x} < 1$ হয়।

এখন, $\frac{3}{4-10x} > -1$

বা, $\frac{4-10x}{3} < -1$

বা, $4 - 10x < -3$

বা, $-10x < -7$

বা, $10x > 7$

$\therefore x > \frac{7}{10}$

অথবা, $\frac{3}{4-10x} < 1$

বা, $\frac{4-10x}{3} > 1$

বা, $4 - 10x > 3$

বা, $-10x > -1$

বা, $10x < 1$

$\therefore x < \frac{1}{10}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x > \frac{7}{10}$ অথবা, $x < \frac{1}{10}$

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{3}{4-10x}}{1 - \frac{3}{4-10x}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4-10x}}{\frac{4-10x-3}{4-10x}}$$

$$= \frac{3}{4-10x} \times \frac{4-10x}{1-10x}$$

$= \frac{3}{1-10x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৪ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো $P(-5, 5)$, $Q(-15, -5)$, $R(5, -5)$ এবং $T(15, 5)$।

ক. $A(6, 8r)$ এবং $B(5, r^2 - 2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল 2 হলে, r এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্ভুজটির যে অংশ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A(6, 8r)$ এবং $B(5, r^2 - 2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{r^2 - 2 - 8r}{5 - 6}$

$$= \frac{r^2 - 8r - 2}{-1}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{r^2 - 8r - 2}{-1} = 2$

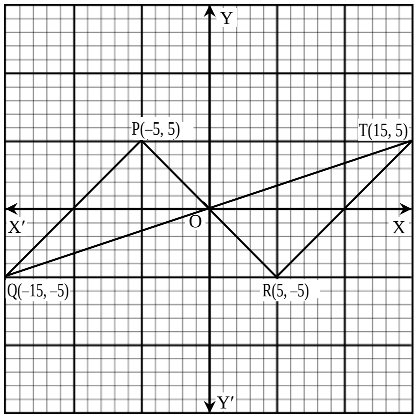
বা, $r^2 - 8r - 2 = -2$

বা, $r^2 - 8r = 0$

বা, $r(r - 8) = 0$

$\therefore r = 0, 8$ **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে,

P(– 5, 5), Q(–15, – 5), R(5, – 5), ও T(15, 5) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

PQ বাহু $= \sqrt{(-5+15)^2+(5+5)^2} = \sqrt{(10)^2+(10)^2}$

$= \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = \sqrt{100\times 2} = 10\sqrt{2}$

QR বাহু $= \sqrt{(-15-5)^2+(-5+5)^2}$

$= \sqrt{(-20)^2+(0)^2} = \sqrt{400+0} = \sqrt{400} = 20$

RT বাহু $= \sqrt{(5-15)^2+(-5-5)^2} = \sqrt{(-10)^2+(-10)^2}$

$= \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = \sqrt{100\times 2} = 10\sqrt{2}$

TP বাহু $= \sqrt{(15+5)^2+(5-5)^2} = \sqrt{(20)^2+(0)^2}$

$= \sqrt{400+0} = \sqrt{400} = 20$

যেহেতু, PQRT চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু PQ = RT এবং QR = TP তাই, চতুর্ভুজটি হয় সামন্তরিক অথবা আয়ত।

কর্ণ PR $= \sqrt{(-5-5)^2+(5+5)^2} = \sqrt{(-10)^2+(10)^2}$

$= \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = \sqrt{100\times 2} = 10\sqrt{2}$

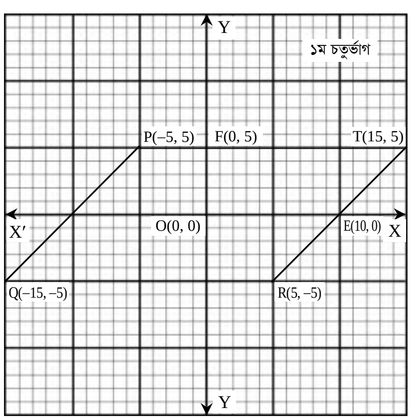
কর্ণ QT $= \sqrt{(-15-15)^2+(-5-5)^2} = \sqrt{(-30)^2+(-10)^2}$

$= \sqrt{900+100} = \sqrt{1000} = \sqrt{100\times 10} = 10\sqrt{10}$

যেহেতু, কর্ণ PR $\neq$ কর্ণ QT

$\therefore$ PQRT চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

গ



চিত্র হতে পাই, PQRT চতুর্ভুজটির ১ম চতুর্ভাগে OETF অংশ অবস্থিত।

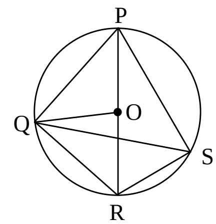
OETF অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\,|(0+50+75+0)-(0+0+0+0)|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\times 125$ বর্গ একক = 62.5 বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ১ম চতুর্ভাগের অংশের ক্ষেত্রফল 62.5 বর্গ একক।

প্রশ্ন ▶ ০৫



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।

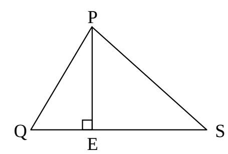
ক. PE $\perp$ QS হলে, PS এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $QP^2 + QR^2 = 2(OQ^2 + OP^2)$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS. ৪

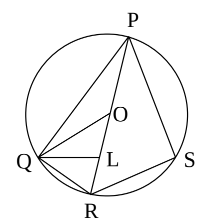
<u>৫নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক



PE $\perp$ QS হলে, PS এর লম্ব অভিক্ষেপ ES.

খ এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS একটি চতুর্ভুজ।



প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + QR^2 = 2(OQ^2 + OP^2)$

অঙ্কন : PR এর উপর QL লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔPOQ এ OP = OQ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

ΔPOQ এ $\angle$POQ স্থূলকোণ এবং PO রেখার বর্ধিতাংশের উপর OQ রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OL.

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 + 2.OP.OL$ .... (i)

আবার, ΔQOR এ $\angle$QOR সূক্ষ্মকোণ এবং OR রেখার উপর OQ রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OL।

সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$QR^2 = OQ^2 + OR^2 - 2.OR.OL$ .... (ii)

এখন (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$PQ^2 + QR^2 = OP^2 + OQ^2 + 2.OP.OL + OQ^2 + OR^2 - 2.OR.OL$

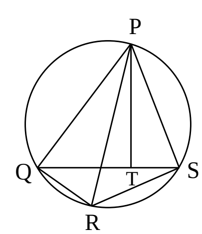
$= 2OQ^2 + OP^2 + OR^2 + 2.OP.OL - 2.OR.OL$

$= 2OQ^2 + OP^2 + OP^2 + 2.OP.OL - 2.OP.OL$ [$\because$ OP = OR]

$= 2OQ^2 + 2OP^2 = 2(OQ^2 + OP^2)$

$\therefore QP^2 + QR^2 = 2(OQ^2 + OP^2)$. **(প্রমাণিত)**

গ এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটি কর্ণ।



PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS।

অঙ্কন : $\angle$QPR কে $\angle$SPR থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle$QPR এর সমান করে $\angle$SPT আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle$QPR = $\angle$SPT

বা, $\angle$QPR + $\angle$RPT = $\angle$SPT + $\angle$RPT [$\angle$RPT যোগ করে]

$\therefore$ $\angle$QPT = $\angle$RPS

এখন, ΔPQT ও ΔPRS এর মধ্যে

$\angle QPT = \angle RPS$, $\angle PQS = \angle PRS$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore$ ΔPQT ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ $PR \cdot QT = PQ \cdot RS$ .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPTS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPT$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = \angle PST$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PTS$

$\therefore$ ΔPQR ও ΔPTS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$

বা, $PR \cdot ST = QR \cdot PS$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PR \cdot QT + PR \cdot ST = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$

বা, $PR (QT + ST) = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$

$\therefore PR \cdot QS = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$ [$\because QT + ST = QS$]

$\therefore PR \cdot QS = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ (i) $4x - 3y + 30 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।
(ii) $3x + ry + 1 = 0$ রেখাটি (2, 1) বিন্দুগামী।

ক. $6x + 2y + 24 = 0$ রেখার y-অক্ষের ছেদক নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (ii) নং এ উল্লিখিত রেখার সমান্তরাল এবং (– 5, 3) বিন্দু দিয়ে যায়। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $6x + 2y + 24 = 0$

বা, $2y = -6x - 24$

$\therefore y = -3x - 12 \ldots\ldots$ (i)

(i) নং রেখাটিকে $y = mx + c$ রেখার সাথে তুলনা করে পাই,

y অক্ষের ছেদক, $c = -12$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $4x - 3y + 30 = 0$ সরলরেখাটি x-অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

রেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করলে, $y = 0$

$4x - 3.0 + 30 = 0$

বা, $4x = -30$

বা, $x = -\frac{15}{2}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A\left(-\frac{15}{2}, 0\right)$

আবার, রেখাটি y অক্ষকে ছেদ করলে, $x = 0$

$4.0 - 3y + 30 = 0$

বা, $3y = 30$

বা, $y = 10$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক B(0, 10)

মূলবিন্দু 0(0, 0) হলে,

$$\Delta AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}\,|(0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 75)| \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 75 \text{ বর্গ একক}$$

$$= 37.5 \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল 37.5 বর্গএকক **(Ans)**

গ $3x + ry + 1 = 0$ রেখাটি (2, 1) বিন্দুগামী হলে, $3.2 + r.1 + 1 = 0$

বা, $6 + r + 1 = 0$

বা, $7 + r = 0 \quad \therefore r = -7$

অর্থাৎ, (ii)নং এ উল্লিখিত রেখাটিতে r এর মান বসিয়ে পাই,

$3x - 7y + 1 = 0$

বা, $7y = 3x + 1$

বা, $y = \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}$

$\therefore$ রেখাটির ঢাল $= \frac{3}{7}$

নির্ণেয় রেখাটি প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল বলে এদের ঢাল সমান হবে।

$\therefore$ (– 5, 3) বিন্দুগামী এবং $\frac{3}{7}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ, $y - 3 = \frac{3}{7}(x + 5)$

বা, $7y - 21 = 3x + 15$

$\therefore 3x - 7y + 36 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৭ (i) $\tan\alpha + \sec\alpha = A$
(ii) $F(\alpha) = \cos\alpha$

ক. $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$ হলে, $\cot\beta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $F\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ হলে প্রমাণ কর যে, $y^2 - A^2 = 0$. ৪

গ. $A = \sqrt{3}$ হলে, α এর মান নির্ণয় কর; যখন $0 \le \alpha \le 2\pi$ ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$

বা, $\cos^2\beta = \frac{4}{7}$ বা, $1 - \sin^2\beta = \frac{4}{7}$

বা, $\sin^2\beta = 1 - \frac{4}{7}$ বা, $\sin^2\beta = \frac{3}{7}$

বা, $\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ $\therefore \cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}} = \pm\frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \cot\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $F(\alpha) = \cos\alpha$

বা, $F\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$

বা, $\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = \sin\alpha$

বা, $\frac{y^2 - 1 + y^2 + 1}{y^2 - 1 - y^2 - 1} = \frac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2y^2}{-2} = \frac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha - 1}$

বা, $y^2 = \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$

বা, $y^2 = \frac{(1 + \sin\alpha)^2}{(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)}$

বা, $y^2 = \frac{(1 + \sin\alpha)^2}{1 - \sin^2\alpha}$

বা, $y^2 = \left(\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$

বা, $y^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$

বা, $y^2 = (\sec A + \tan A)^2$

বা, $y^2 = A^2$ [$\because \tan\alpha + \sec\alpha = A$]

$\therefore y^2 - A^2 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\tan\alpha + \sec\alpha$ এবং $A = \sqrt{3}$

$\therefore \tan\alpha + \sec\alpha = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha} = \sqrt{3}$

বা, $(1 + \sin\alpha) = \sqrt{3}\cos\alpha$

বা, $(1 + \sin\alpha)^2 = (\sqrt{3}\cos\alpha)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$

বা, $1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 3(1 - \sin^2\alpha)$

বা, $1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 3 - 3\sin^2\alpha$

বা, $1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha - 3 + 3\sin^2\alpha = 0$

বা, $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 2 = 0$

বা, $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$

বা, $2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - \sin\alpha - 1 = 0$

বা, $2\sin\alpha(\sin\alpha + 1) - 1(\sin\alpha + 1) = 0$

বা, $(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 1) = 0$

হয়, $2\sin\alpha - 1 = 0$

বা, $2\sin\alpha = 1$

বা, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

অথবা, $\sin\alpha + 1 = 0$

বা, $\sin\alpha = -1$

বা, $\sin\alpha = \sin\frac{3\pi}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{3\pi}{2}$

১ম চতুর্ভাগে,

$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

আবার, ২য় চতুর্ভাগে,

$\sin\alpha = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin\alpha = \sin\frac{6\pi - \pi}{6}$

বা, $\sin\alpha = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{5\pi}{6}$

কিন্তু $\alpha = \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ না করায় α এর এই মানদ্বয় গ্রহণযোগ্য নয়।

নির্ণেয় মান : $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো।

ক. যদি শুধু ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হয়, তবে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত তা নির্ণয় কর। ২

খ. যদি মুদ্রা বাদে ছক্কাটি দুইবার নিক্ষেপ করা হয়, তবে নমুনাক্ষেত্র হতে একই ফলাফল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে Probability tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র হতে মুদ্রায় টেল ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 6টি।

ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা = 3টি। যথা : 2, 3, 5.

$\therefore$ ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$. **(Ans.)**

খ ছক্কাটি দুইবার নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে নিম্নরূপ:

নমুনাক্ষেত্র = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 36 টি

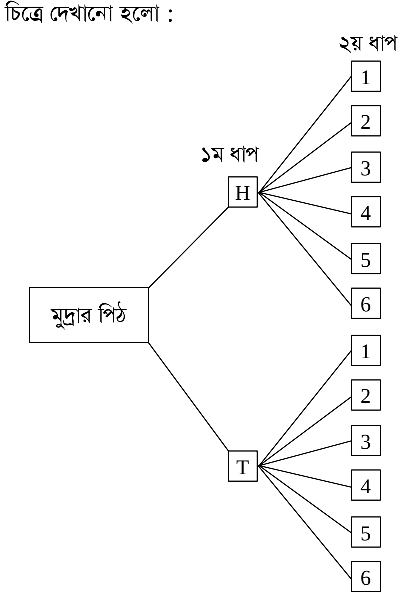
আবার ছক্কা দুইটিতে একই সংখ্যা আসার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র

= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$\therefore$ অনুকূল নমুনাবিন্দু = 6 টি

$\therefore$ উভয় ছক্কায় একই ফলাফল আসার সম্ভাবনা $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

গ একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে ছয়টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। ঘটনাগুলোর মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিচের চিত্রে দেখানো হলো :



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি :

S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 12টি।

মুদ্রাতে টেল ও ছক্কাতে জোড় সংখ্যা পাওয়ার অনুকূল ফলাফল 3টি।

যথা : T2, T4, T6.

$\therefore$ P (মুদ্রাতে টেল ও ছক্কাতে জোড় সংখ্যা) $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$. **(Ans.)**

ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৩

উচ্চতর গণিত (বহুনির্বাচনি অভীক্ষা)

বিষয় কোড : | 1 | 2 | 6 |

সময় : ২৫ মিনিট [২০২৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী] পূর্ণমান : ২৫

*[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সরবরাহকৃত বহুনির্বাচনি অভীক্ষার উত্তরপত্রে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বরের বিপরীতে প্রদত্ত বর্ণসংবলিত বৃত্তসমূহ হতে সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্তটি বল পয়েন্ট কলম দ্বারা সম্পূর্ণ ভরাট কর। প্রতিটি প্রশ্নের মান-১।]* **প্রশ্নপত্রে কোনো প্রকার দাগ/চিহ্ন দেয়া যাবে না।**

১. দুইটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা একত্রে একবার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনার নমুনা বিন্দুর সংখ্যা কত হবে?

ⓚ 144 ⓚ 72 ⓖ 36 ⓖ 24

২. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1-(-1)^{5n}}{2}$ হলে, এর দশম পদ কত?

ক 5 খ 2 গ 1 ঘ 0

৩. $16 - 4 + 1 - \frac{1}{4} +$ .... গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক 12 খ $\frac{64}{5}$ গ 20 ঘ $\frac{64}{3}$

৪. একটি বাক্সে 6 টি নীল, 5টি সবুজ ও 7টি হলুদ বল আছে। বাক্সটি থেকে নিরপেক্ষভাবে একটি বল তোলা হলে তা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক $\frac{7}{18}$ খ $\frac{6}{18}$ গ $\frac{5}{18}$ ঘ $\frac{0}{18}$

□ **নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ৫ ও ৬নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

সজীব সকাল 7 : 30 টায় বিদ্যালয়ের উদ্দেশ্যে রওনা হয়ে সকাল 7 : 45 টায় বিদ্যালয়ে পৌঁছায়। তার ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 4 মি. মি.।

৫. সজীবের রওনা হওয়ার সময় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ কত হবে?

ক $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান খ $\frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান গ $\frac{5\pi}{12}$ রেডিয়ান ঘ $\frac{7\pi}{12}$ রেডিয়ান

৬. বাড়ি থেকে বিদ্যালয় পর্যন্ত পৌঁছাতে মিনিটের কাঁটাটির অগ্রভাগ কত দূরত্ব অতিক্রম করে?

ক π মি. মি. খ $\frac{3\pi}{2}$ মি. মি. গ 2π মি. মি. ঘ $\frac{5\pi}{2}$ মি. মি.

৭. দুইটি বহুপদী F(x) ও G(x) সকল x এর জন্য সমান হলে–

i. এদের সমতাকে অভেদ বলা হয়

ii. বহুপদীদ্বয়কে $F(x) \equiv G(x)$ আকারে লেখা যায়

iii. উভয়ের মাত্রা অসমান হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৮. $(9 - 6x + x^2)^{3n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 7 হলে, n এর মান কত?

ক 1 খ 2 গ 4 ঘ 6

৯. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি জোড় কিন্তু 6 দ্বারা বিভাজ্য না হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে?

ক $\frac{1}{6}$ খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{2}{3}$ ঘ $\frac{5}{6}$

১০. 1 + 3 + 9 + 27 + ... ধারাটির–

i. সাধারণ অনুপাত 3

ii. n তম পদ 3^{n-1}

iii. প্রথম 7টি পদের সমষ্টি 1093

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১১. $\left(m^3 + \frac{1}{m^3}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে m মুক্ত পদের মান কত?

ক 0 খ 4 গ 6 ঘ 8

১২. $\sin B = \frac{1}{2}$ হলে $\cos 3B - \sin 3B$ এর মান কত?

ক −2 খ −1 গ 1 ঘ 2

□ **নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ১৩ ও ১৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :**

M (6, −3) এবং N(−1, 4) বিন্দুগামী রেখাটি y-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

১৩. রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

ক 30° খ 45° গ 90° ঘ 135°

১৪. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ক (0, 3) খ (0, −3) গ (−3, 0) ঘ (3, 0)

১৫. $4x^4 + 3x^6 - x^3 - 6x - 3$ রাশিটির মুখ্যসহগ ও ধ্রুবপদের সমষ্টি কত?

ক 0 খ 1 গ 3 ঘ 7

১৬. একটি ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের পরিধি 2π সে. মি. হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত?

ক 2π বর্গ সে.মি. খ 4π বর্গ সে.মি. গ 8π বর্গ সে.মি. ঘ 16π বর্গ সে.মি.

১৭. $3.27^n = 9^{n+3}$ হলে, n এর মান কত?

ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{9}{3}$ গ 5 ঘ 7

১৮. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং ঋণাত্মক দিকে 9 একক দূরত্বে অবস্থিত সরলরেখাটির সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক x + 9 = 0 খ x − 9 = 0 গ y − 9 = 0 ঘ y + 9 = 0

১৯. $\frac{1-x}{(x+3)(x+5)} \equiv \frac{2}{x+3} + \frac{B}{x+5}$ হলে, B এর মান কত হবে?

ক −3 খ −2 গ 2 ঘ 4

২০. $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ এবং $\cot\theta$ ও $\csc\theta$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে, $\sin\theta$ এর মান কত?

ক $-\frac{5}{12}$ খ $-\frac{5}{13}$ গ $\frac{5}{13}$ ঘ $\frac{12}{5}$

২১. কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে কোনো শীর্ষের দূরত্ব 6 সে.মি. হলে পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর দূরত্ব কত?

ক 12 সে. মি. খ 9 সে. মি. গ 6 সে. মি. ঘ 3 সে. মি.

২২. $f(x) = \ln(x-2)$ ফাংশনটি–

i. একটি লগারিদমিক ফাংশন

ii. x > 2 এর জন্য সংজ্ঞায়িত

iii. রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

২৩. $f(x) = 1 - 4^{-x}$ এর বিপরীত ফাংশন নিচের কোনটি?

ক $\log_4(x-1)$ খ $\log_4(1-x)$ গ $\log_4\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ঘ $\log_4\left(\frac{1}{x-1}\right)$

২৪. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদের সহগ তৃতীয় পদের সহগের সমান হলে, n এর মান কত?

ক 2 খ 3 গ 4 ঘ 5

২৫. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস কত?

ক 3 সে.মি. খ $3\sqrt{3}$ সে.মি. গ $6\sqrt{3}$ সে.মি. ঘ $9\sqrt{3}$ সে.মি.

■ **খালি ঘরগুলোতে পেনসিল দিয়ে উত্তরগুলো লেখো। এরপর প্রদত্ত উত্তরমালার সাথে মিলিয়ে দেখো তোমার উত্তরগুলো সঠিক কি না।**

উত্তর	১		২		৩		৪		৫		৬		৭		৮		৯		১০		১১		১২		১৩	
	১৪		১৫		১৬		১৭		১৮		১৯		২০		২১		২২		২৩		২৪		২৫			

ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৩

০৩ সেট

উচ্চতর গণিত (সৃজনশীল) **বিষয় কোড :** | 1 | 2 | 6 |

[২০২৩ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

সময় : ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট **পূর্ণমান : ৫০**

*[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক। প্রত্যেক বিভাগ থেকে ন্যূনতম একটি করে মোট **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।]*

ক বিভাগ–বীজগণিত

১। $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rq)$ এবং $Q(x) = x^3 - 49x$.

ক. $g(x) = \sqrt{2x + 1}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $A(p, q, r) = pqr$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$. ৪

গ. $\frac{x^3}{Q(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২। $(6y - 5)^{-1} + (6y - 5)^{-2} + (6y - 5)^{-3} + ...$ একটি অসীম ধারা এবং $B = \left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $(1 + 2x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতিতে x^6 এবং x^{11} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩। $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$; $p \geq 0$ এবং $Q(x) = 2^{1-x}$ যেখানে $-4 \leq x \leq 4$.

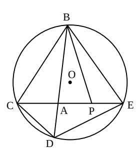
ক. $F(x) = \frac{x - 3}{|x - 3|}$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $7p^3 + 21p = 48$ ৪

গ. Q(x) ফাংশনটির লেখচিত্র হতে রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

খ বিভাগ–জ্যামিতি ও ভেক্টর

৪।



ক. সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি 54 বর্গ একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. চিত্রে AC = AP = PE হলে, প্রমাণ কর যে, $BC^2 + BE^2 = AB^2 + BP^2 + 4AP^2$. ৪

গ. $\angle CBD = \angle PBE$ হলে প্রমাণ কর যে, CD.BE + BC.DE = CE.BD. ৪

৫। A(x, y), B(1, 2), C(2, 1) এবং D(– x, – y) কার্তেসীয় তলে অবস্থিত চারটি বিন্দু।

ক. 5x + 4y = 20 রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. AB || CD হলে প্রমাণ কর যে, $x - y + 1 = 0$. ৪

গ. ΔABC এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x + y = 15$ এবং $x + y + 9 = 0$. ৪

৬। $y = x + 6$, $y = -x + 6$, $y = -x - 6$ এবং $y = x - 6$ একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে।

ক. $y = -x - 7$ রেখাটি x অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. ১ম দুটি সরলরেখা এবং x-অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ বিভাগ–ত্রিকোণমিতি ও সম্ভাবনা

৭। $a\cos^2x + b\sin^2x = c$; $a > c > b > 0$ এবং $\sin\theta = \frac{5}{13}$.

ক. $\sin A + \sin^2 A = 1$ হলে দেখাও যে, $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan x = \pm\sqrt{\frac{c - a}{b - c}}$. ৪

গ. $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, দেখাও যে, $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}$ ৪

৮। ঘটনা-১ : একটি ছক্কা এবং দুটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলো।
ঘটনা-২ : একজন শিক্ষার্থী 31, 32, 33, ..., 50 নম্বরধারী 20টি সমআকৃতির কার্ড নিল।

ক. 32′4″ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. ঘটনা-১ এর 'probability tree' অঙ্কন কর এবং নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ৪

গ. ঘটনা-২ এর একটি কার্ড দৈবভাবে নির্বাচন করলে কার্ডের সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	খ	২	ঘ	৩	খ	৪	ঘ	৫	ক	৬	গ	৭	ক	৮	ক	৯	খ	১০	ঘ	১১	গ	১২	খ	১৩	ঘ
	১৪	ক	১৫	ক	১৬	খ	১৭	গ	১৮	ঘ	১৯	ক	২০	গ	২১	ঘ	২২	ক	২৩	গ	২৪	খ	২৫	গ		

সৃজনশীল

প্রশ্ন ▶ ০১ $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rq)$ এবং $Q(x) = x^3 - 49x$.

ক. $g(x) = \sqrt{2x + 1}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $A(p, q, r) = pqr$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$. ৪

গ. $\frac{x^3}{Q(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{2x + 1}$

এখানে, $\sqrt{2x + 1} \in R$ হবে যদি ও কেবল যদি

$2x + 1 \geq 0$ হয়

বা, $2x \geq -1 \therefore x \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x \in R : x \geq -\frac{1}{2}\}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$

এবং $A(p, q, r) = pqr$

বা, $(p + q + r)(pq + qr + rp) = pqr$

বা, $(p + q + r)(pq + qr + rp) - pqr = 0$

বা, $p^2q + pqr + rp^2 + pq^2 + q^2r + pqr + pqr + qr^2 + r^2p - pqr = 0$

বা, $p^2q + pqr + rp^2 + pq^2 + q^2r + pqr + qr^2 + r^2p = 0$

বা, $p^2q + pq^2 + pqr + q^2r + rp^2 + pqr + r^2p + qr^2 = 0$

বা, $pq(p + q) + qr(p + q) + rp(p + q) + r^2(p + q) = 0$

বা, $(p + q)(pq + qr + rp + r^2) = 0$

বা, $(p + q)\{q(r + p) + r(r + p)\} = 0$

বা, $(p + q)(q + r)(r + p) = 0$

$\therefore p = -q$ অথবা, $q = -r$ অথবা, $r = -p$

$p = -q$ হলে,

বামপক্ষ $= \frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{(-q + q + r)^5} = \frac{1}{r^5}$

ডানপক্ষ $= \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{(-q)^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r^5}$

$\therefore \frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 - 49x = x(x^2 - 49)$

$= x\{(x)^2 - (7)^2\} = x(x + 7)(x - 7)$

$\therefore \frac{x^3}{Q(x)} = \frac{x^3}{x(x + 7)(x - 7)} = \frac{x^2}{(x + 7)(x - 7)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x + 7)(x - 7)} \equiv 1 + \frac{A}{x + 7} + \frac{B}{x - 7}$ .... (i)

এখন, (i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 7)(x - 7)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv (x + 7)(x - 7) + A(x - 7) + B(x + 7)$ .... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 7, -7$ বসিয়ে পাই,

$7^2 = B(7 + 7) \quad \therefore B = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}$

এবং $(-7)^2 = A(-7 - 7) \therefore A = \frac{49}{-14} = \frac{-7}{2}$

এখন, A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{(x + 7)(x + 7)} \equiv 1 + \frac{-\frac{7}{2}}{x + 7} + \frac{\frac{7}{2}}{x - 7} \therefore \frac{x^3}{Q(x)} = 1 - \frac{7}{2(x + 7)} + \frac{7}{2(x - 7)}$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ০২ $(6y - 5)^{-1} + (6y - 5)^{-2} + (6y - 5)^{-3} + ...$ একটি অসীম ধারা এবং $B = \left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $(1 + 2x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতিতে x^6 এবং x^{11} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$(1 + 2x)^4 = \binom{4}{0}(2x)^0 + \binom{4}{1}(2x)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2 + \binom{4}{3}(2x)^3 + \binom{4}{4}(2x)^4$$

$$= 1 + \frac{4}{1}2x + \frac{4.3}{1.2} \times 4x^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3} \times 8x^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} \times 16x^4$$

$$= 1 + 8x + 24x^2 + 32x^3 + 16x^4$$

$\therefore x^3$ এর সহগ 32. **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি : $(6y - 5)^{-1} + (6y - 5)^{-2} + (6y - 5)^{-3} + ...$

$= \frac{1}{6y - 5} + \frac{1}{(6y - 5)^2} + \frac{1}{(6y - 5)^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{6y - 5}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(6y - 5)^2} \times \frac{(6y - 5)}{1} = \frac{1}{6y - 5}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{6y - 5}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{6y - 5} < 1$

এখন, $-1 < \frac{1}{6y - 5}$

বা, $6y - 5 < -1$

বা, $6y < -1 + 5$

বা, $6y < 4$

বা, $y < \frac{4}{6}$

$\therefore y < \frac{2}{3}$

অথবা, $\frac{1}{6y - 5} < 1$

বা, $6y - 5 > 1$

বা, $6y > 1 + 5$

বা, $6y > 6$

বা, $y > \frac{6}{6}$

$\therefore y > 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $y < \frac{2}{3}$ অথবা $y > 1$

এবং অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{1}{6y - 5}}{1 - \frac{1}{6y - 5}}$

$= \frac{\frac{1}{6y - 5}}{\frac{6y - 6}{6y - 5}} = \frac{1}{6y - 5} \times \frac{6y - 5}{6y - 6}$

$= \frac{1}{6y - 6}$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = \left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^8$

$$= {}^8C_0 (2x^2)^8 . \left(\frac{a}{x^3}\right)^0 + {}^8C_1 (2x^2)^{8-1} . \left(\frac{a}{x^3}\right)^1 + {}^8C_2 (2x^2)^{8-2} . \left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + ...$$

$$= 2^8 . x^{16} + 8.2^7 . x^{14} . \frac{a}{x^3} + 28.2^6 . x^{12} . \frac{a^2}{x^6} + ...$$

$$= 2^8 . x^{16} + 8a.2^7 . x^{11} + 28a^2 . 2^6 . x^6 + ...$$

এখানে, x^{11} এর সহগ $= 8a \times 2^7$

x^6 এর সহগ $= 28a^2 \times 2^6$

প্রশ্নমতে, $28a^2 \times 2^6 = 8a \times 2^7$

বা, $a = \frac{8 \times 2^7}{28 \times 2^6}$

বা, $a = \frac{16}{28}$

$\therefore a = \frac{4}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান : $\frac{4}{7}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৩ $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$; $p \geq 0$ এবং $Q(x) = 2^{1-x}$ যেখানে $-4 \leq x \leq 4$.

ক. $F(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $7p^3 + 21p = 48$ ৪

গ. $Q(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র হতে রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$F(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$$

$$\frac{x-3}{|x-3|} = \begin{cases} \frac{x-3}{x-3} = 1 \text{ যখন } x > 3 \\ \frac{x-3}{-(x-3)} = -1 \text{ যখন } x < 3 \end{cases}$$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{-1, 1\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

বা, $p^2 + 2 = \sqrt[3]{7^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

বা, $p^2 + 2 = 7^{\frac{2}{3}} + 7^{-\frac{2}{3}}$

বা, $p^2 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}} + \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p^2 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $p^3 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $p^3 = 7 - 7^{-1} - 3.p$

বা, $p^3 = 7 - \frac{1}{7} - 3p$

বা, $p^3 = \frac{49 - 1 - 21p}{7}$

বা, $7p^3 = 48 - 21p$

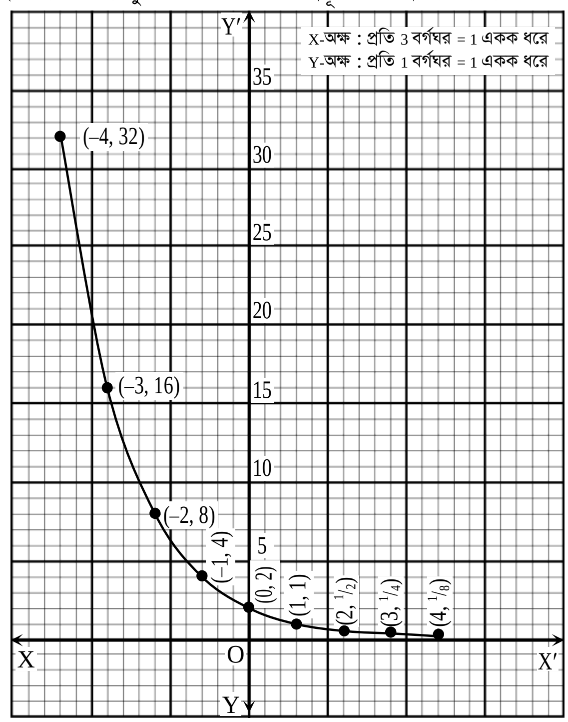
$\therefore 7p^3 + 21p = 48$ **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, $Q(x) = y = 2^{1-x}$; $-4 \leq x \leq 4$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = 2^{1-x}$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়।



চিত্র থেকে লক্ষ করলে দেখা যায়,

$-4 \leq x \leq 4$ সীমার মধ্যে y এর প্রান্তিক মানদ্বয় 32 ও $\frac{1}{8}$।

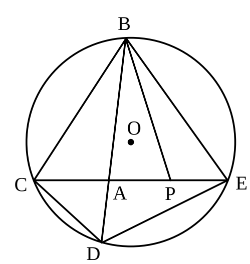
$y(-4) = 2^{1-(-4)} = 2^5 = 32$ এবং $y(4) = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে রেঞ্জ $R = \left[\frac{1}{8}, 32\right]$

একইভাবে, x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে হ্রাস পেতে থাকবে এবং শূন্যের খুব কাছাকাছি পৌঁছায় কিন্তু শূন্য (0) হয় না। অর্থাৎ, $x \to \infty, y \to 0$

$\therefore$ রেঞ্জ $R = (0, \infty)$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ০৪



ক. সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি 54 বর্গ একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. চিত্রে AC = AP = PE হলে, প্রমাণ কর যে, $BC^2 + BE^2 = AB^2 + BP^2 + 4AP^2$. ৪

গ. $\angle CBD = \angle PBE$ হলে প্রমাণ কর যে, CD.BE + BC.DE = CE.BD. ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টির দ্বিগুণ, অতিভুজের বর্গের তিনগুণের সমান।

অর্থাৎ, $2 \times 54 = 3 \times (\text{অতিভুজ})^2$

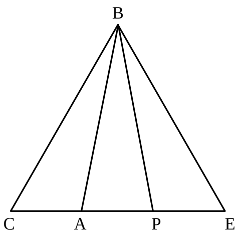
বা, $(\text{অতিভুজ})^2 = \frac{2 \times 54}{3}$

বা, অতিভুজ $= \sqrt{36}$

$\therefore$ অতিভুজ $= 6$

$\therefore$ নির্ণেয় অতিভুজের দৈর্ঘ্য $= 6$ একক। **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, BCE ত্রিভুজের CE বাহু A ও P বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ, AC = AP = PE. প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + BE^2 = AB^2 + BP^2 + 4AP^2$.

প্রমাণ : ΔBCP-এ, AC = AP [দেওয়া আছে]

তাহলে, AB, ΔBCP এর মধ্যমা যা CP কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore BC^2 + BP^2 = 2AB^2 + 2AP^2$ .... (i)

আবার, BP, ΔABE এর মধ্যমা যা AE কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore BE^2 + AB^2 = 2BP^2 + 2AP^2$ .... (ii)

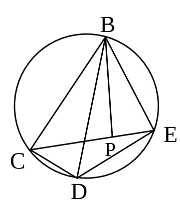
(i)নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$BC^2 + BP^2 + BE^2 + AB^2 = 2AB^2 + 2AP^2 + 2BP^2 + 2AP^2$

বা, $BC^2 + BE^2 = 2AB^2 + 2AP^2 + 2BP^2 + 2AP^2 - BP^2 - AB^2$

$\therefore BC^2 + BE^2 = AB^2 + BP^2 + 4AP^2$. **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, বৃত্তে BCDE একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। BD এবং CE দুইটি কর্ণ এবং $\angle CBD = \angle EBP$ যেখানে BP রেখাংশ CE-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে, BD.CE = BC.DE + CD.BE

প্রমাণ : চিত্র হতে পাই, $\angle CBD = \angle EBP$

প্রত্যেকের সাথে $\angle PBD$ যোগ করে পাই,

$\angle CBD + \angle PBD = \angle EBP + \angle PBD$

বা, $\angle CBP = \angle DBE$

এখন, ΔBCP এবং ΔBDE এ $\angle CBP = \angle DBE$

বা, $\angle BCP = \angle BDE$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore \Delta BCP$ এবং ΔBDE সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{CP}{DE} = \frac{BC}{BD}$

অর্থাৎ, BD.CP = BC.DE ....(i)

আবার, ΔBCD এবং ΔBPE এ $\angle CBD = \angle EBP$ [অঙ্কনানুসারে]

$\angle BEP = \angle BDC$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore \Delta BCD$ এবং ΔBPE সদৃশকোণী

$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{EP}{CD}$

বা, BE.CD = BD.EP ....(ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

BD.CP – BE.CD = BC.DE – BD.EP

বা, BD.CP + BD .EP – BE.CD = BC.DE

বা, BD(CP + EP) – BE.CD = BC.DE

বা, BD.CE – CD.BE = BC.DE [$\because$ CP + EP = CE]

সুতরাং CD.BE + BC.DE = CE.BD **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ০৫ A(x, y), B(1, 2), C(2, 1) এবং D(– x, – y) কার্তেসীয় তলে অবস্থিত চারটি বিন্দু।

ক. $5x + 4y = 20$ রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. AB || CD হলে প্রমাণ কর যে, $x - y + 1 = 0$. ৪

গ. ΔABC এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x + y = 15$ এবং $x + y + 9 = 0$. ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $5x + 4y = 20$

রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করলে এর কোটি, y = 0

$\therefore 5x + 4 \times 0 = 20$

বা, $5x = 20$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (x, y) = (4, 0). **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(x, y), B(1, 2), C(2, 1) ও D(– x, – y) চারটি বিন্দু।

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{2 - y}{1 - x}$

এবং CD রেখার ঢাল $= \frac{-y - 1}{-x - 2} = \frac{y + 1}{x + 2}$

যেহেতু AB || CD. অতএব এদের ঢালদ্বয় সমান,

$\therefore \frac{2 - y}{1 - x} = \frac{y + 1}{x + 2}$

বা, $2x - xy + 4 - 2y = y + 1 - xy - x$

বা, $2x - xy + 4 - 2y - y - 1 + xy + x = 0$

বা, $3x - 3y + 3 = 0$

বা, $3(x - y + 1) = 0$

$\therefore x - y + 1 = 0$. **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, A(x, y), B(1, 2) ও C(2, 1).

প্রশ্নমতে,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল = 6

বা, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & x \\ y & 2 & 1 & y \end{vmatrix} = 6$

বা, $\frac{1}{2}|2x + 1 + 2y - y - 4 - x| = 6$

বা, $\frac{1}{2}|x + y - 3| = 6$

বা, $|x + y - 3| = 12$

বা, $x + y - 3 = \pm 12$

অর্থাৎ, $x + y - 3 = 12$ এবং $x + y - 3 = -12$

$\therefore x + y = 15$ বা, $x + y - 3 + 12 = 0$

$\therefore x + y + 9 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ০৬ $y = x + 6$, $y = -x + 6$, $y = -x - 6$ এবং $y = x - 6$ একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে।

ক. $y = -x - 7$ রেখাটি x অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. ১ম দুটি সরলরেখা এবং x-অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y = -x - 7$

রেখাটির ঢাল, $m = -1$

রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল,

$m = \tan\theta$

বা, $-1 = \tan\theta$

বা, $\tan\theta = \tan 135°$

$\therefore \theta = 135°$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = x + 6$ ....(i)

$y = -x + 6$ .... (ii)

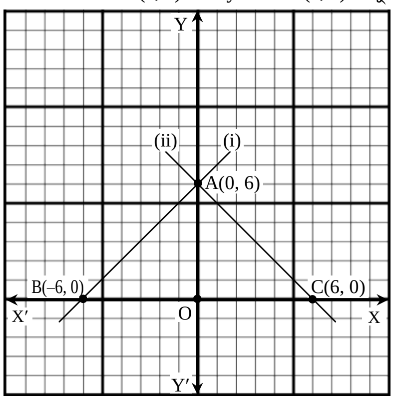
(i) নং এ পর্যায়ক্রমে $y = 0$ এবং $x = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -6$ এবং $y = 6$

$\therefore$ (i) নং রেখাটি x-অক্ষকে $(-6, 0)$ এবং y-অক্ষকে $(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) নং এ $y = 0$ এবং $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$x = 6$ এবং $y = 6$

$\therefore$ (ii) নং রেখাটি x-অক্ষকে $(6, 0)$ এবং y-অক্ষকে $(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র হতে (i), (ii) ও X-অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ ABC; যার A, B, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, 6), (-6, 0), (6, 0)$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|36 + 36|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 72$ বর্গ একক

$= 36$ বর্গ একক। **(Ans.)**

গ প্রদত্ত রেখাসমূহ, $y = x + 6$ .... (i)

$y = -x + 6$ .... (ii)

$y = -x - 6$ .... (iii)

$y = x - 6$ .... (iv)

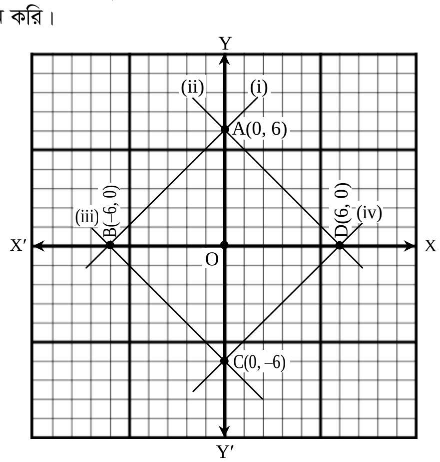
(i) নং রেখা X-অক্ষকে $(-6, 0)$ বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে $(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) নং রেখা X-অক্ষকে $(6, 0)$ বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে $(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(iii) নং রেখা X-অক্ষকে $(-6, 0)$ বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে $(0, -6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(iv) নং রেখা X-অক্ষকে $(6, 0)$ বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে $(0, -6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, প্রাপ্ত তথ্যানুযায়ী (i), (ii), (iii) ও (iv) নং রেখাকে গ্রাফ কাগজে অঙ্কন করি।



চিত্র হতে পাই, উৎপন্ন চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হলো $A(0, 6), B(-6, 0), C(0, -6)$ এবং $D(6, 0)$.

এখানে, চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয় AC ও BD.

AC ও BD সরলরেখা দুইটি যথাক্রমে Y-অক্ষ ও X-অক্ষ।

$\therefore$ Y-অক্ষের অর্থাৎ, AC রেখার সমীকরণ : $x = 0$

এবং X-অক্ষের অর্থাৎ, BD রেখার সমীকরণ : $y = 0$. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▸ ০৭ $a\cos^2x + b\sin^2x = c;\ a > c > b > 0$ এবং $\sin\theta = \frac{5}{13}$.

ক. $\sin A + \sin^2 A = 1$ হলে দেখাও যে, $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan x = \pm\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$. ৪

গ. $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, দেখাও যে, $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \mathrm{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}$ ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin A + \sin^2 A = 1$

বা, $\sin A = 1 - \sin^2 A$

বা, $\sin A = \cos^2 A$

বা, $\sin^2 A = \cos^4 A$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2 A = \cos^4 A$

$\therefore \cos^2 A + \cos^4 A = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $a\cos^2x + b\sin^2x = c$

বা, $a(1 - \sin^2x) + b\sin^2x = c$

বা, $a - a\sin^2x + b\sin^2x = c$

বা, $(b - a)\sin^2x = c - a$

বা, $\sin^2x = \frac{c-a}{b-a}$ .... (i)

আবার,

$a\cos^2x + b\sin^2x = c$

বা, $a\cos^2x + b(1 - \cos^2x) = c$

বা, $a\cos^2x + b - b\cos^2x = c$

বা, $(a - b)\cos^2x = c - b$

বা, $\cos^2x = \frac{c-b}{a-b}$

বা, $\cos^2x = \frac{b-c}{b-a}$ .... (ii)

(i) ÷ (ii) করে পাই,

$\frac{\sin^2x}{\cos^2x} = \frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-a}{b-c}$

বা, $\tan^2x = \frac{c-a}{b-a}$

$\therefore \tan x = \pm\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$. **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\sin^2\theta = \left(\frac{5}{13}\right)^2$

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{25}{169}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{144}{169}$

বা, $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{12}{13}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{12}{13}$ [$\because \cos\theta$ ঋণাত্মক]

বামপক্ষ $= \dfrac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}(-\theta)}$

$= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \text{cosec}\theta}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{\dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{-12}{13}} + \dfrac{1}{-\frac{12}{13}}}{\dfrac{\frac{-12}{13}}{\frac{5}{13}} - \dfrac{1}{\frac{5}{13}}}$

$= \dfrac{-\dfrac{5}{12} - \dfrac{13}{12}}{-\dfrac{12}{5} - \dfrac{13}{5}}$

$= \dfrac{\frac{-18}{12}}{\frac{-25}{5}} = \dfrac{-18}{12} \times \dfrac{5}{-25}$

$= \dfrac{3}{10}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ০৮ ঘটনা-১ : একটি ছক্কা এবং দুটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলো।
ঘটনা-২ : একজন শিক্ষার্থী 31, 32, 33, ..., 50 নম্বরধারী 20টি সমআকৃতির কার্ড নিল।

ক. 32′4″ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. ঘটনা-১ এর 'probability tree' অঙ্কন কর এবং নমুনাক্ষেত্রটি লেখ। ৪

গ. ঘটনা-২ এর একটি কার্ড দৈবভাবে নির্বাচন করলে কার্ডের সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক $32'4'' = 32' + \left(\dfrac{4}{60}\right)'$

$= 32' + \left(\dfrac{1}{15}\right)' = \left(32\dfrac{1}{15}\right)'$

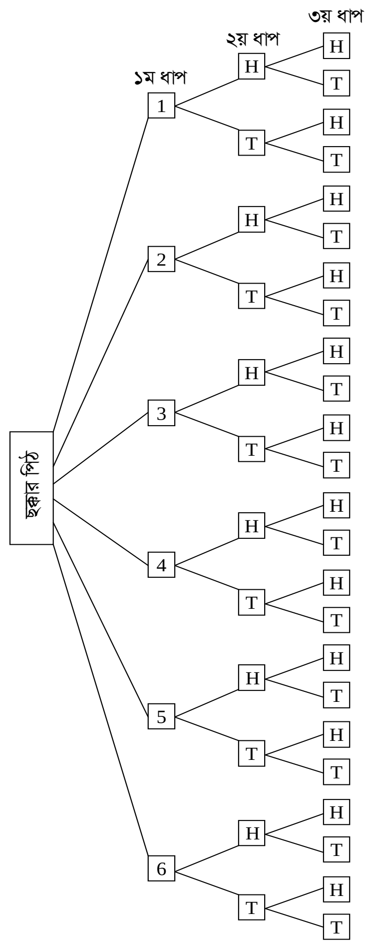
$= \left(\dfrac{481}{15}\right)'$

$= \left(\dfrac{481}{15 \times 60}\right)^0$

$= \dfrac{481}{900} \times \dfrac{\pi}{180}$

= 0.00932 রেডিয়ান। **(Ans.)**

খ একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের পরীক্ষাকে তিনটি ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। পরবর্তী দুইটি ধাপের প্রত্যেকটিতে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে দেখানো যায় :



নমুনাক্ষেত্রটি :
S = {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT}

গ 20টি কার্ডে 31 থেকে 50 নম্বরধারী সংখ্যাগুলো হলো :
31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.
মোট কার্ডের সংখ্যা = 20টি
কার্ডের সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক এমন সংখ্যা = 11টি
যথা : 31, 33, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 45, 47, 48.

$\therefore$ কার্ডের সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= \dfrac{11}{20}$.

(Ans.)