মডেল টেস্ট-এর উত্তরমালা

উচ্চতর গণিত

মডেল টেস্ট- ০১

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	গ	২	ক	৩	ক	৪	খ	৫	খ	৬	ঘ	৭	খ	৮	ঘ	৯	ঘ	১০	গ	১১	খ	১২	ঘ	১৩	খ
	১৪	ক	১৫	খ	১৬	ঘ	১৭	ঘ	১৮	গ	১৯	খ	২০	ঘ	২১	ক	২২	খ	২৩	ঘ	২৪	গ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x-5}{4x-3}$

এখন, $f(x) = x$ হলে, $\frac{3x-5}{4x-3} = x$

বা, $4x^2 - 3x = 3x - 5$

বা, $4x^2 - 3x - 3x + 5 = 0$

বা, $4x^2 - 6x + 5 = 0$ যা একটি $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ।

সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.\ 4.\ 5$
$= 36 - 80 = -44$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটির নিশ্চায়ক -44.

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x-5}{4x-3}$

এখানে, $f(x) = \frac{3x-5}{4x-3} \in \mathbb{R}$ হবে যদি এবং কেবল যদি $4x - 3 \neq 0$

বা, $4x \neq 3$

বা, $x \neq \frac{3}{4}$ হয়।

$\therefore$ ডোম, $f(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}$

ধরি, $a, b \in$ ডোম $f(x)$

এখন, $f(a) = \frac{3a-5}{4a-3}$

এবং $f(b) = \frac{3b-5}{4b-3}$

$f(x)$ এক-এক ফাংশন হবে যদি এবং কেবল যদি $a, b \in$ ডোম $f(x)$ এর জন্য $f(a) = f(b)$ হলে $a = b$ হয়।

$f(a) = f(b)$ হলে, $\frac{3a-5}{4a-3} = \frac{3b-5}{4b-3}$

বা, $12ab - 9a - 20b + 15 = 12ab - 20a - 9b + 15$

বা, $-9a - 20b = -20a - 9b$

বা, $-9a + 20a = -9b + 20b$

বা, $11a = 11b \quad \therefore a = b$

$\therefore f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x-5}{4x-3}$

ধরি, $y = f(x) = \frac{3x-5}{4x-3}$

তাহলে, $f(x) = y$

বা, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(y)$

বা, $x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = \frac{3x-5}{4x-3}$

বা, $4xy - 3y = 3x - 5$

বা, $4xy - 3x = 3y - 5$

বা, $x(4y - 3) = 3y - 5$

বা, $x = \frac{3y-5}{4y-3}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{3y-5}{4y-3}$ $[\because x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3x-5}{4x-3}$

$\therefore f^{-1}(1) = \frac{3.1-5}{4.1-3} = \frac{-2}{1} = -2$

এখন, $f^{-1}(x) = xf^{-1}(1)$ হলে, $\frac{3x-5}{4x-3} = x.(-2)$

বা, $\frac{3x-5}{4x-3} = -2x$

বা, $3x - 5 = -8x^2 + 6x$

বা, $8x^2 - 6x + 3x - 5 = 0$

বা, $8x^2 - 3x - 5 = 0$

বা, $8x^2 - 8x + 5x - 5 = 0$

বা, $8x(x - 1) + 5(x - 1) = 0$

বা, $(x - 1)(8x + 5) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$ $\therefore x = 1$

অথবা, $8x + 5 = 0$ বা, $8x = -5 \therefore x = -\frac{5}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান : $x = -\frac{5}{8}, 1.$

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $f(x) = 15x^3 + bx^2 - x - 8$

$\therefore$ $(3x + 2)$, $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে যদি $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ হয়।

এখন, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

বা, $15\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + b\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 8 = 0$

বা, $15 \times \left(\frac{-8}{27}\right) + \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - 8 = 0$

বা, $\frac{-40}{9} + \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - 8 = 0$

বা, $\frac{-40 + 4b + 6 - 72}{9} = 0$

বা, $4b - 106 = 0$

বা, $4b = 106$

বা, $b = \frac{106}{4}$

$\therefore b = \frac{53}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{64z^3}$

প্রশ্নমতে, $F(x, y, z) = \frac{3}{24xyz}$

বা, $\frac{1}{8x^3} + \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{64z^3} = \frac{3}{24xyz}$

বা, $\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \left(\frac{1}{3y}\right)^3 + \left(\frac{1}{4z}\right)^3 - 3.\frac{1}{2x}.\frac{1}{3y}.\frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{4z}\right)\left\{\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3y}\right)^2+\left(\frac{1}{3y}-\frac{1}{4z}\right)^2+\left(\frac{1}{4z}-\frac{1}{2x}\right)^2\right\}=0$

হয়, $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{6yz + 4zx + 3xy}{12xyz} = 0$

$\therefore 6yz + 4zx + 3xy = 0$

অথবা, $\left\{\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3y}\right)^2 + \left(\frac{1}{3y} - \frac{1}{4z}\right)^2 + \left(\frac{1}{4z} - \frac{1}{2x}\right)^2\right\} = 0$

আমরা জানি, একাধিক রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে তারা প্রত্যেকেই পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3y} = 0$ এবং $\frac{1}{3y} - \frac{1}{4z} = 0$

বা, $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3y}$ বা, $\frac{1}{3y} = \frac{1}{4z}$

$\therefore 2x = 3y$ ... ... (i) $\therefore 3y = 4z$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $2x = 3y = 4z$

সুতরাং, $6yz + 4zx + 3xy = 0$ অথবা, $2x = 3y = 4z$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 - 64x$

$\therefore \frac{3x^3}{Q(x)} = \frac{3x^3}{x^3 - 64x}$

$= \frac{3x^3}{x(x^2 - 64)} = \frac{3x^2}{x^2 - 64}$

$= \frac{3(x^2 - 64) + 192}{x^2 - 64} = 3 + \frac{192}{x^2 - 64}$

$= 3 + \frac{192}{(x + 8)(x - 8)}$ ... ... (i)

ধরি, $\frac{192}{(x + 8)(x - 8)} \equiv \frac{A}{x + 8} + \frac{B}{x - 8}$ ... ... (ii)

(ii) নং এ পর্যায়ক্রমে এর উভয়পক্ষকে $(x + 8)(x - 8)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $192 \equiv A(x - 8) + B(x + 8)$ ... ... (iii)

(iii) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 8$ এবং $x = -8$ বসিয়ে পাই,

$B = 12, A = -12$

$\therefore \frac{192}{(x + 8)(x - 8)} \equiv -\frac{12}{x + 8} + \frac{12}{x - 8}$

(i) নং হতে পাই, $\frac{3x^3}{Q(x)} = \frac{3x^3}{x^2 - 64} \equiv 3 - \frac{12}{x + 8} + \frac{12}{x - 8}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $a^{a\sqrt{a}} = (a\sqrt{a})^a$

বা, $(a^a)^{\sqrt{a}} = \left(a \,.\, a^{\frac{1}{2}}\right)^a$

বা, $(a^a)^{\sqrt{a}} = \left(a^{1+\frac{1}{2}}\right)^a$

বা, $(a^a)^{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^a$

বা, $(a^a)^{\sqrt{a}} = (a^a)^{\frac{3}{2}}$ বা, $\sqrt{a} = \frac{3}{2}$

বা, $(\sqrt{a})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\therefore a = \frac{9}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{9}{4}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = \frac{1}{a^y + a^{-z} + 1} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1} + \frac{1}{a^x + a^{-y} + 1}$

$= \frac{1}{a^y + \frac{1}{a^z} + 1} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1} + \frac{1}{a^x + \frac{1}{a^y} + 1}$

$= \frac{1}{\frac{a^y.a^z + 1 + a^z}{a^z}} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1} + \frac{1}{\frac{a^x.\,a^y + 1 + a^y}{a^y}}$

$= \frac{a^z}{a^{y+z} + a^z + 1} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1} + \frac{a^y}{a^{x+y} + a^y + 1}$

$= \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{a^y}{a^{-z} + a^y + 1}$

$[\because x + y + z = 0]$

$= \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{a^y}{\frac{1}{a^z} + a^y + 1}$

$= \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{a^y.a^z}{1 + a^y.a^z + a^z}$

$= \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{a^{y+z}}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= \frac{a^z + 1 + a^{y+z}}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= \frac{1 + a^z + a^{y+z}}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore M = 1$. **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $A = 4^x - 3.2^{x+2}$

বা, $4^x - 3.2^{x+2} = -32$ $[\because A = -32]$

বা, $4^x - 3.\, 2^x \,.\, 2^2 + 32 = 0$

বা, $(2^2)^x - 12 \,.\, 2^x + 32 = 0$

বা, $(2^x)^2 - 12 \,.\, 2^x + 32 = 0$

বা, $p^2 - 12p + 32 = 0$ [ধরি, $2^x = p$]

বা, $p^2 - 8p - 4p + 32 = 0$

বা, $p(p - 8) - 4(p - 8) = 0$

বা, $(p - 4)(p - 8) = 0$

হয়, $p - 4 = 0$

বা, $p = 4$

বা, $2^x = 2^2$ $[\because p = 2^x]$

$\therefore x = 2$

অথবা,

$p - 8 = 0$

বা, $p = 8$

বা, $2^x = 2^3$ $[\because p = 2^x]$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় $x = 2, 3$ **(Ans.)**

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, পরিবৃত্তের পরিধি = 24 সে.মি.

অর্থাৎ, $2\pi r = 24$ [r = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $r = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{\pi}$

আমরা জানি, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেক।

$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2} \times \frac{12}{\pi}$ সে.মি.

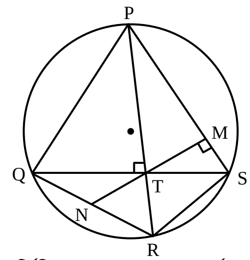
$= \frac{6}{\pi}$ সে.মি.

$\therefore$ নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times \left(\frac{6}{\pi}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= \pi \times \frac{36}{\pi^2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{36}{\pi}$ বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

খ



মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত QPSR চতুর্ভুর্জের কর্ণদ্বয় QS ও PR পরস্পরকে লম্বভাবে T বিন্দুতে ছেদ করে। T হতে PS বাহুর উপর TM লম্ব এবং বর্ধিত MT বিপরীত QR বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ করতে হবে যে, QN = RN.

প্রামণ : একই চাপ SR এর উপর দণ্ডায়মান বলে $\angle SPR = \angle SQR$

অর্থাৎ, $\angle SPT = \angle TQN$

আবার, $\angle SPT = \angle STM$ [উভয়ে একই $\angle PTM$ এর পূরক কোণ বলে]

সুতরাং $\angle TQN = \angle NTQ$

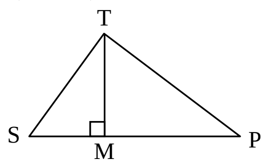
ফলে ΔQNT ত্রিভুজে QN = NT

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\angle NRT = \angle PST = \angle PTM = \angle RTN$

ফলে, RNT ত্রিভুজে RN = NT

সুতরাং QN = RN. **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, ΔTSP-এ $\angle STP = 90°$ এবং $TM \perp SP$। প্রমাণ করতে হবে যে, $TM^2 = PM.SM$

প্রমাণ : $\angle STP = 90°$

$\therefore \angle STM + \angle MTP = 90°$ ... ... (i)

আবার, $TM \perp SP$ বলে,

$\angle TMS = \angle TMP = 90°$

ΔSTM-এ, $\angle TMS + \angle STM + \angle TSM = 180°$

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $90° + \angle STM + \angle TSM = 180$ [$\because \angle TMS = 90°$]

বা, $\angle STM + \angle TSM = 90°$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\angle STM + \angle MTP = \angle STM + \angle TSM$

$\therefore \angle MTP = \angle TSM$

ΔTSM ও ΔTPM-এ

$\angle TMS = \angle TMP$, $\angle TSM = \angle MTP$

অবশিষ্ট $\angle STM$ = অবশিষ্ট $\angle TPM$

$\therefore \Delta TSM$ ও ΔTPM সদৃশ

$\therefore \frac{ST}{TP} = \frac{TM}{PM} = \frac{SM}{TM}$

অর্থাৎ, $\frac{TM}{PM} = \frac{SM}{TM}$

$\therefore TM^2 = PM.SM$ **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y = -x - 7$

রেখাটির ঢাল, $m = -1$

রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল,

$m = \tan\theta$

বা, $-1 = \tan\theta$

বা, $\tan\theta = \tan 135°$

$\therefore \theta = 135°$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = x + 6$ ....(i)

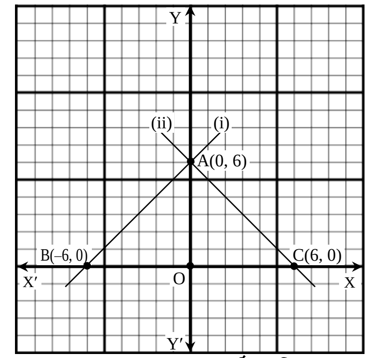
$y = -x + 6$ .... (ii)

(i) নং এ পর্যায়ক্রমে y = 0 এবং x = 0 বসিয়ে পাই, x = – 6 এবং y = 6

$\therefore$ (i) নং রেখাটি x-অক্ষকে (– 6, 0) এবং y-অক্ষকে (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) নং এ y = 0 এবং x = 0 বসিয়ে পাই, x = 6 এবং y = 6

$\therefore$ (ii) নং রেখাটি x-অক্ষকে (6, 0) এবং y-অক্ষকে (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র হতে (i), (ii) ও X-অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ ABC; যার A, B, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 6), (– 6, 0), (6, 0)

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|36 + 36|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 72$ বর্গ একক

= 36 বর্গ একক। **(Ans.)**

গ প্রদত্ত রেখাসমূহ, $y = x + 6$ .... (i)

$y = -x + 6$ .... (ii)

$y = -x - 6$ .... (iii)

$y = x - 6$ .... (iv)

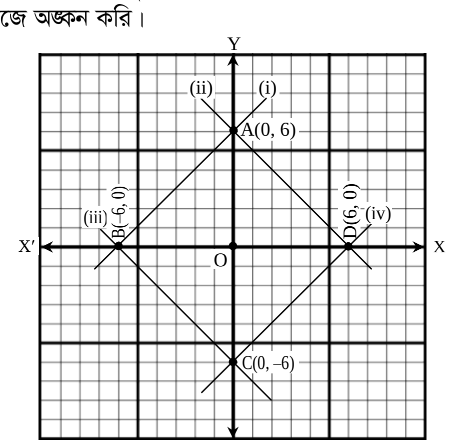
(i) নং রেখা X-অক্ষকে (– 6, 0) বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) নং রেখা X-অক্ষকে (6, 0) বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

(iii) নং রেখা X-অক্ষকে (– 6, 0) বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে (0, – 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

(iv) নং রেখা X-অক্ষকে (6, 0) বিন্দুতে এবং Y-অক্ষকে (0, – 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

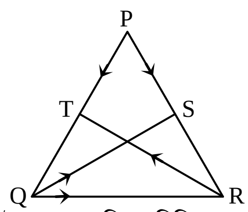
এখন, প্রাপ্ত তথ্যানুযায়ী (i), (ii), (iii) ও (iv) নং রেখাকে গ্রাফ কাগজে অঙ্কন করি।



চিত্র হতে পাই, উৎপন্ন চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হলো A(0, 6), B(– 6, 0), C(0, – 6) এবং D(6, 0).
এখানে, চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয় AC ও BD.
AC ও BD সরলরেখা দুইটি যথাক্রমে Y-অক্ষ ও X-অক্ষ।
$\therefore$ Y-অক্ষের অর্থাৎ, AC রেখার সমীকরণ : $x = 0$
এবং X-অক্ষের অর্থাৎ, BD রেখার সমীকরণ : $y = 0$. **(Ans.)**

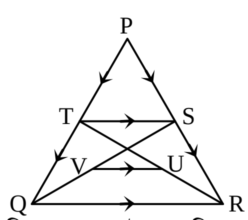
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔPQS হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,
$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$ [ত্রিভুজবিধি]
বা, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{QS}$
$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}$ ... ... (i)
আবার, ΔPRT হতে, $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PT}$ [ত্রিভুজবিধি]
$\therefore \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{RT}$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) থেকে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{RT}\right) - \overrightarrow{QS}$
বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RT}\right) - \overrightarrow{QS}$
বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RT} - \overrightarrow{QS}$
বা, $4\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{RT} - 4\,\overrightarrow{QS}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]
বা, $3\overrightarrow{PQ} = -\,2\overrightarrow{RT} - 4\overrightarrow{QS}$
বা, $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{RT} - \frac{4}{3}\overrightarrow{QS}$
$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{QS} - \frac{2}{3}\overrightarrow{RT}$ **(Ans.)**

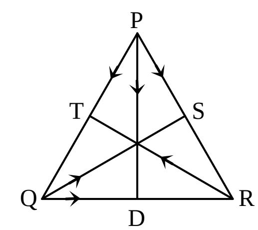
খ চিত্রে, T, PQ এর মধ্যবিন্দু এবং QR ∥ TS। QRST ট্রাপিজিয়ামের TR এবং SQ কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে U ও V। U, V যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, UV ∥ TS ∥ QR এবং $UV = \frac{1}{2}(QR - TS)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে Q, R, T, S এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{Q}$, $\underline{R}$, $\underline{T}$, $\underline{S}$
$\therefore$ U বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{R})$ [$\because$ U, TR এর মধ্যবিন্দু]
এবং V বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{Q})$ [$\because$ V, SQ এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore \overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{Q}) - \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{R}) = \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{Q} - \underline{T} - \underline{R})$
$= \frac{1}{2}\{(S - T) - (R - Q)\} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right)$

QR ∥ TS হওয়ায় $\left(\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right)$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{TS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{UV}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{TS}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।
কারণ, $\overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right)$
বা, $\left|\overrightarrow{UV}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{TS} - \overrightarrow{QR}\right|$
$\therefore UV = \frac{1}{2}(TS - QR)$
বা, $UV = -\frac{1}{2}(TS - QR) = \frac{1}{2}(QR - TS)$
$\therefore$ UV ∥ TS ∥ QR এবং $UV = \frac{1}{2}(QR - TS)$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔPQD-এ ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD}$
$\therefore \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ ... ... (i) [D, QR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$]



ΔPRT-এ $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}$
বা, $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PR}$
$\therefore \overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$ ... ... (ii)
[T, PQ এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]
এবং ΔPQS-এ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$
বা, $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ}$
$\therefore \overrightarrow{QS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ ... ... (iii)
[S, PR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$]
এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$
বা, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \underline{0}$
$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RT} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin A + \sin^2 A = 1$
বা, $\sin A = 1 - \sin^2 A$
বা, $\sin A = \cos^2 A$
বা, $\sin^2 A = \cos^4 A$ [বর্গ করে]
বা, $1 - \cos^2 A = \cos^4 A$
$\therefore \cos^2 A + \cos^4 A = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$a\cos^2x + b\sin^2x = c$

বা, $a(1 - \sin^2x) + b\sin^2x = c$

বা, $a - a\sin^2x + b\sin^2x = c$

বা, $(b - a)\sin^2x = c - a$

বা, $\sin^2x = \frac{c - a}{b - a}$ .... (i)

আবার,

$a\cos^2x + b\sin^2x = c$

বা, $a\cos^2x + b(1 - \cos^2x) = c$

বা, $a\cos^2x + b - b\cos^2x = c$

বা, $(a - b)\cos^2x = c - b$

বা, $\cos^2x = \frac{c - b}{a - b}$

বা, $\cos^2x = \frac{b - c}{b - a}$ .... (ii)

(i) ÷ (ii) করে পাই,

$\frac{\sin^2x}{\cos^2x} = \frac{c - a}{b - a} \times \frac{b - a}{b - c}$

বা, $\tan^2x = \frac{c - a}{b - a}$

$\therefore \tan x = \pm\sqrt{\frac{c - a}{b - c}}$. **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\sin^2\theta = \left(\frac{5}{13}\right)^2$

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{25}{169}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{144}{169}$

বা, $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{12}{13}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{12}{13}$ [$\because \cos\theta$ ঋণাত্মক]

বামপক্ষ $= \frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \mathrm{cosec}(-\theta)}$

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \mathrm{cosec}\theta}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}}$

$= \frac{\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} + \frac{1}{-\frac{12}{13}}}{\frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} - \frac{1}{\frac{5}{13}}}$

$= \frac{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{\frac{-18}{12}}{\frac{-25}{5}}$

$= \frac{-18}{12} \times \frac{5}{-25}$

$= \frac{3}{10}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 6টি।

ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা = 3টি। যথা : 2, 3, 5.

$\therefore$ ছক্কা নিক্ষেপে মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি ঝুড়িতে 10টি নীল, 12টি সবুজ ও 8টি হলুদ বল আছে।

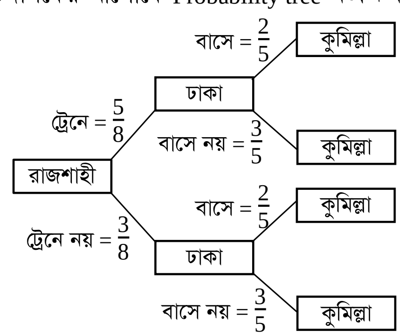
এখানে, মোট বল সংখ্যা = 10 + 12 + 8 = 30টি

$\therefore$ বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{12}{30} = \frac{5}{2}$. **(Ans.)**

বলটি হলুদ না হওয়ার সম্ভাবনা = 1 – (হলুদ হওয়ার সম্ভাবনা)

$= 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$. **(Ans.)**

গ নিম্নে উদ্দীপকের আলোকে Probability tree অঙ্কন করা হলো :



$\therefore$ লোকটির ঢাকায় ট্রেনে কিন্তু কুমিল্লায় বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$ **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০২

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	গ	২	ক	৩	ঘ	৪	ঘ	৫	খ	৬	ক	৭	গ	৮	গ	৯	ঘ	১০	ক	১১	গ	১২	ক	১৩	গ
	১৪	গ	১৫	গ	১৬	ক	১৭	খ	১৮	ঘ	১৯	ঘ	২০	ঘ	২১	গ	২২	খ	২৩	খ	২৪	ঘ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(m) = 5m^3 - 11m^2 - 3m + 4$

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $f(m)$ কে $(m + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-2)$.

$$\therefore f(-2) = 5(-2)^3 - 11(-2)^2 - 3(-2) + 4$$
$$= -40 - 44 + 6 + 4$$
$$= -84 + 10 = -74$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ -74 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = p^4(q - r) + q^4(r - p) + r^4 + (p - q)$

$$= p^4(q - r) + q^4r - pq^4 + pr^4 - qr^4$$
$$= p^4(q - r) + qr(q^3 - r^3) - p(q^4 - r^4)$$
$$= (q - r)\{p^4 + qr(q^2 + qr + r^2) - p(q + r)(q^2 + r^2)\}$$
$$= (q - r)\{p^4 + qr(q^2 + qr + r^2) - p(q^3 + qr^2 + q^2r + r^3)\}$$
$$= (q - r)\{p^4 + q^3r + q^2r^2 + qr^3 - pq^3 - pqr^2 - pq^2r - pr^3\}$$
$$= (q - r)\{p(p^3 - q^3) - r^3(p - q) - q^2r(p - q) - qr^2(p - q)\}$$
$$= (q - r)(p - q)\{p(p^2 + pq + q^2) - r^3 - q^2r - qr^2\}$$
$$= (q - r)(p - q)(p^3 + p^2q + pq^2 - r^3 - q^2r - qr^2)$$
$$= (q - r)(p - q)\{-q^2(r - p) - q(r^2 - p^2) - (r^3 - p^3)\}$$
$$= (q - r)(p - q)(r - p)\{-q^2 - q(r + p) - (r^2 + rp + p^2)\}$$
$$= (q - r)(p - q)(r - p)\{-q^2 - qr - pq - r^2 - rp - p^2\}$$
$$= -(p - q)(q - r)(r - p)(p^2 + q^2 + r^2 + pq + qr + rp)$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= -(p - q)(q - r)(r - p)$
$(p^2 + q^2 + r^2 + pq + qr + rp)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = x^3 + x^2 - 5x + 3$

$$= x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + x + 3$$
$$= x^2(x + 3) - 2x(x + 3) + 1(x + 3)$$
$$= (x + 3)(x^2 - 2x + 1)$$
$$= (x + 3)(x - 1)^2$$

$$\therefore \frac{x}{B} = \frac{x}{(x + 3)(x - 1)^2}$$

ধরি, $\dfrac{x}{(x + 3)(x - 1)^2} \equiv \dfrac{A}{x + 3} + \dfrac{B}{(x - 1)} + \dfrac{C}{(x - 1)^2}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 3)(x - 1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x \equiv A(x - 1)^2 + B(x + 3)(x - 1) + C(x + 3)$ .... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই, $-3 = 16A + B.0 + C.0$

বা, $16A = -3 \quad \therefore A = -\dfrac{3}{16}$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = A.0 + B.0 + 4C$

বা, $4C = 1 \quad \therefore C = \dfrac{1}{4}$

আবার, (ii) নং হতে,

$x = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x + 3)$

বা, $x = (A + B)x^2 + (-2A + 2B + C)x + A - 3B + 3C$

উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + B = 0$

বা, $-\dfrac{3}{16} + B = 0 \quad \therefore B = \dfrac{3}{16}$

A, B, C এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(x + 3)(x - 1)^2} \equiv \frac{-\frac{3}{16}}{x + 3} + \frac{\frac{3}{16}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x - 1)^2}$$

$$\therefore \frac{x}{B} = -\frac{3}{16(x + 3)} + \frac{3}{16(x - 1)} + \frac{1}{4(x - 1)^2}.$$ **(Ans.)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y^2 + 4y - 3 = 0$

সমীকরণটিকে $ay^2 + by + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 4$ এবং $c = -3$

$$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4.1(-3)}}{2.1}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 7}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$
$$= \frac{2(-2 \pm \sqrt{7})}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $y = -2 \pm \sqrt{7}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটি

$(3x + 1)^{-1} + (3x + 1)^{-2} + (3x + 1)^{-3} + \ldots \ldots$

$$= \frac{1}{3x + 1} + \frac{1}{(3x + 1)^2} + \frac{1}{(3x + 1)^3} + \ldots \ldots \ldots$$

$x = \dfrac{2}{3}$ হলে, ধারাটি $\dfrac{1}{3.\frac{2}{3} + 1} + \dfrac{1}{\left(3.\frac{2}{3} + 1\right)^2} + \dfrac{1}{\left(3.\frac{2}{3} + 1\right)^3} + \ldots \ldots \ldots$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots \ldots \ldots$$

যার প্রথম পদ, $a = \dfrac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3^2} \times 3 = \dfrac{1}{3} < 1$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $[\because r < 1]$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 7 পদের সমষ্টি, $S_7 = \dfrac{a(1 - r^7)}{1 - r}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^7}\right)}{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\left(\frac{3^7 - 1}{3^7}\right)$$
$$= \frac{3^7 - 1}{2 \times 3^7}$$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

প্রদত্ত ধারা : $(3x+1)^{-1} + (3x+1)^{-2} + (3x+1)^{-3} + \dots\dots\dots$

$$= \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \dots\dots\dots$$

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x+1)^2} \div \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

$\therefore \left|\frac{1}{3x+1}\right| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < \frac{1}{3x+1} < 1$

হয়, $\frac{1}{3x+1} > -1$

বা, $3x + 1 < -1$

বা, $3x < -1 - 1$

বা, $3x < -2$

$\therefore x < -\frac{2}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x+1} < 1$

বা, $3x + 1 > 1$

বা, $3x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $3x > 0$

$\therefore x > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{2}{3}$ অথবা $x > 0$ **(Ans.)**

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{3x+1}}{1 - \frac{1}{3x+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{3x+1-1}{3x+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{3x}{3x+1}}$$

$$= \frac{1}{3x+1} \times \frac{3x+1}{3x}$$

$$= \frac{1}{3x} \text{ (Ans.)}$$

<u>**৩নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

ক $a = 1$ হলে, $\left(a - \frac{x}{3}\right)^7 = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^7$

$$= 1 + \binom{7}{1}\left(-\frac{x}{3}\right)^1 + \binom{7}{2}\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \dots\dots\dots\dots$$

$$= 1 - \frac{7}{1}\cdot\frac{x}{3} + \frac{7.6}{1.2}\cdot\frac{x^2}{9} - \dots\dots$$

$$= 1 - \frac{7}{3}x + \frac{7}{3}x^2 - \dots\dots \text{ (Ans.)}$$

খ প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= \left(a - \frac{x}{3}\right)^7$

$$\left(a - \frac{x}{3}\right)^7 = a^7 + \binom{7}{1}a^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2}a^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \binom{7}{3}a^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{7}{4}a^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \binom{7}{5}a^2\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \binom{7}{6}a\left(-\frac{x}{3}\right)^6 + \left(-\frac{x}{3}\right)^7$$

$$= a^7 - \binom{7}{1}\frac{a^6x}{3} + \binom{7}{2}\frac{a^5x^2}{3^2} - \binom{7}{3}\frac{a^4x^3}{3^3} + \binom{7}{4}\frac{a^3x^4}{3^4} - \binom{7}{5}\frac{a^2x^5}{3^5} + \binom{7}{6}\frac{ax^6}{3^6} - \frac{x^7}{3^7}.$$

a^3 এর সহগ $= \binom{7}{4}\frac{x^4}{3^4}$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{7}{4}\frac{x^4}{3^4} = 560$

বা, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = 1296$

$\therefore x = 6$ **(Ans.)**

গ $\left(a - \frac{x}{3}\right)^7 = a^7 + {}^7C_1 a^{7-1}\left(-\frac{x}{3}\right)^1 + {}^7C_2 a^{7-2}\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3 a^{7-3}\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4 a^{7-4}\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + {}^7C_5 a^{7-5}\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \dots\dots$

$$= a^7 - \frac{7}{1}.a^6.\frac{x}{3} + \frac{7.6}{1.2}.a^5.\frac{x^2}{9} - \frac{7.6.5}{1.2.3}.a^4.\frac{x^3}{27} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.a^3.\frac{x^4}{81} - \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.a^2.\frac{x^5}{243} + \dots\dots$$

$$= a^7 - \frac{7}{3}a^6x + \frac{7}{3}a^5x^2 - \frac{35}{27}a^4x^3 + \frac{35}{81}a^3x^4 - \frac{7}{81}a^2x^5 + \dots\dots$$

প্রশ্নমতে, $-\frac{35}{27}a^4 = 135 \times \left(-\frac{7}{81}\right)a^2$

বা, $\frac{a^4}{a^2} = \left(-\frac{7 \times 135}{81}\right) \times \left(-\frac{27}{35}\right)$

বা, $a^2 = 9$

$\therefore a = \pm 3$

$\therefore$ নির্ণেয় $a = \pm 3$ **(Ans.)**

<u>**৪নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

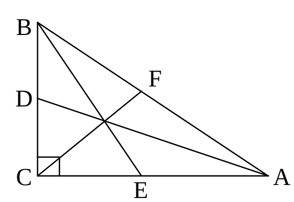
ক আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ এর মধ্যমা বা উচ্চতার $\frac{2}{3}$ অংশ। প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হলে,

উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ একক

শর্তমতে, $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = 6$

$\therefore a = 6\sqrt{3}$ সেমি **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন : ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = 90°$ এবং AD, BE ও CF ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle ACB = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

এখন, ΔABC এ CF মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BC^2 + AC^2 = 2(CF^2 + BF^2) = 2CF^2 + 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$ $\left[\because BF = \frac{1}{2}AB\right]$

বা, $BC^2 + AC^2 = 2CF^2 + \frac{1}{2}AB^2$

বা, $2CF^2 = (BC^2 + AC^2) - \frac{1}{2}AB^2$

বা, $2CF^2 = \frac{2(BC^2 + AC^2) - AB^2}{2}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $2BE^2 = \frac{2(BC^2 + AB^2) - AC^2}{2}$ ... ... (ii)

এবং $2AD^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{2}$ ... ... (iii)

(i) + (ii) + (iii) নং হতে পাই,

$2(CF^2 + BE^2 + AD^2)$

$= \frac{4(BC^2 + AB^2 + AC^2) - (BC^2 + AB^2 + AC^2)}{2}$

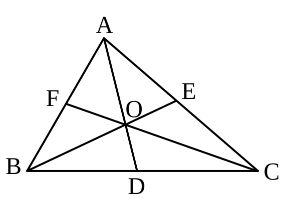
$= \frac{3(BC^2 + AB^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + AB^2)}{2}$ $[\because AB^2 = AC^2 + BC^2]$

$= \frac{3.2AB^2}{2}$

$\therefore 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

প্রমাণ: ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ... ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$ বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$ বা, $2AD = 3AO$ বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$

$\therefore$ (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

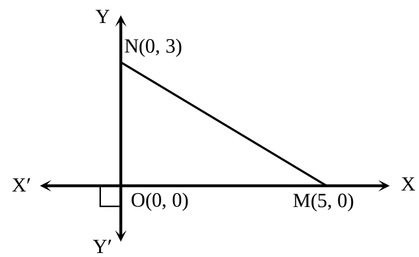
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ **(প্রমাণিত)**

<u>৫নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক



চিত্র হতে, O(0, 0), M(5, 0) এবং N(0, 3)

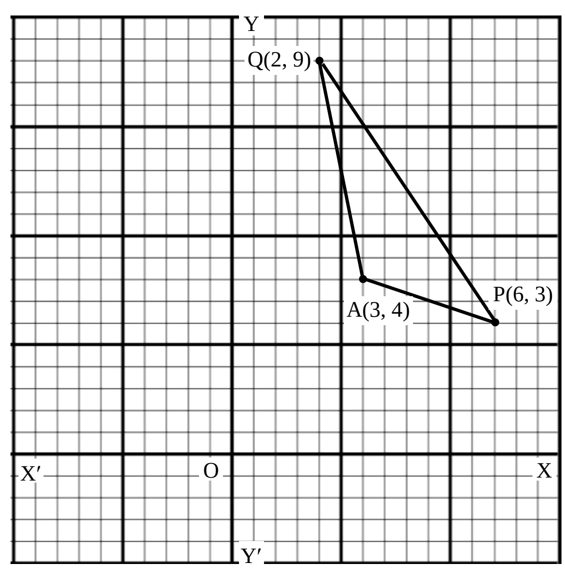
$\therefore$ OMN ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|(0 + 15 + 0 - 0 - 0 - 0)|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 15$ বর্গ একক

$= \frac{15}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

খ ছক কাগজে x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে A(3, 4), P(6, 3) ও Q(2, 9) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত APQ ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখানে, $AP = \sqrt{(3-6)^2 + (4-3)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + (1)^2}$
$= \sqrt{9+1}$
$= \sqrt{10}$
$AQ = \sqrt{(3-2)^2 + (4-9)^2}$
$= \sqrt{(1)^2 + (-5)^2}$
$= \sqrt{1+25}$
$= \sqrt{26}$
এবং $PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (3-9)^2}$
$= \sqrt{(4)^2 + (-6)^2}$
$= \sqrt{16+36}$
$= \sqrt{52}$
$= 2\sqrt{13}$
এখানে, $AP^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$
$AQ^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$
$PQ^2 = (2\sqrt{13})^2 = 4 \times 13 = 52$
এখানে, $AP^2 + AQ^2 = 10 + 26$
$= 36 < PQ^2$
$\therefore \angle PAQ$ স্থূলকোণ।
$\therefore \Delta APQ$ একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। **(প্রমাণিত)**

গ A(3, 4), B(2t, 5) এবং C(6, t) শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত

ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2t & 6 & 3 \\ 4 & 5 & t & 4 \end{vmatrix}$
$= \frac{1}{2}|(15 + 2t^2 + 24 - 8t - 30 - 3t)|$
$= \frac{1}{2}|2t^2 - 11t + 9|$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|2t^2 - 11t + 9| = 19\frac{1}{2}$
বা, $\frac{1}{2}|2t^2 - 11t + 9| = \frac{39}{2}$
বা, $\pm(2t^2 - 11t + 9) = 39$
বা, $2t^2 - 11t + 9 = \pm 39$
হয়, $2t^2 - 11t + 9 = 39$
বা, $2t^2 - 11t - 30 = 0$
বা, $2t^2 - 15t + 4t - 30 = 0$
বা, $t(2t - 15) + 2(2t - 15) = 0$
বা, $(2t - 15)(t + 2) = 0$
$\therefore t = -2, \frac{15}{2}$ **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ, r = 9 সে.মি.
$\therefore$ গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক
$= 4 \times 3.1416 \times 9^2$ বর্গ সে.মি.
$= 4 \times 3.1416 \times 81$ বর্গ সে.মি.
$= 1017.8784$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
$\therefore$ নির্ণেয় নিরেট গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 1017.8784 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

খ এখানে,
নিরেট লোহার গোলকের ব্যাসার্ধ, r = 9 সে.মি.
$\therefore$ নিরেট লোহার গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক
ধরি, নিরেট গোলকটির লোহা থেকে n সংখ্যক নিরেট সিলিন্ডার তৈরি করা যাবে যেখানে নিরেট সিলিন্ডারের দৈর্ঘ্য, h = 4 সে.মি. এবং ব্যাস 6 সে.মি.।
$\therefore$ নিরেট সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $r_1 = \frac{6}{2}$ সে.মি = 3 সে.মি
নিরেট সিলিন্ডারের আয়তন এবং নিরেট গোলকের আয়তন সমান হবে।
অর্থাৎ, $n \times \pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3$
বা, $n = \frac{4\pi r^3}{3\pi r_1^2 h}$
বা, $n = \frac{4\pi \times 9^3}{3\pi \times 3^2 \times 4}$
বা, $n = \frac{4\pi \times 729}{3\pi \times 9 \times 4}$
$\therefore n = 27$
$\therefore$ নিরেট গোলকটি থেকে 27 টি নিরেট সিলিন্ডার প্রস্তুত করা যাবে।

গ এখানে, নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ r = 9 সে.মি.
$\therefore$ নিরেট গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক
ফাঁপা গোলকটির বহিব্যাসার্ধ $r_2 = 11$ সে.মি.
ধরি, দ্বিতীয় ফাঁপা গোলকটির পুরুত্ব = x সে.মি.
$\therefore$ ফাঁপা গোলকটির অন্তঃব্যাসার্ধ, $r_3 = (11 - x)$ সে.মি.
ফাঁপা গোলকটির লোহার আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_3^3$
নিরেট গোলকের আয়তন এবং ফাঁপা গোলকের লোহার আয়তন সমান হবে।
অর্থাৎ, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_3^3$
বা, $r^3 = r_2^3 - r_3^3$
বা, $9^3 = (11)^3 - (11 - x)^3$
বা, $729 = 1331 - (11 - x)^3$
বা, $(11 - x)^3 = 1331 - 729$
বা, $(11 - x)^3 = 602$
বা, $11 - x = \sqrt[3]{602}$
বা, $11 - x = 8.44369$
বা, $x = 11 - 8.44369$
$\therefore x = 2.556$ (প্রায়)

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$
$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$
$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}$
$= 1 + 1 = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

ঢাকা ও রাজশাহীর ক্ষেত্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 3°2'3''$

$= 3° + \left(\frac{2}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{3}{60 \times 60}\right)^{\circ}$

$= \left(\frac{3641}{1200}\right)^{\circ} = \left(\frac{3641}{1200} \times \frac{\pi}{180}\right)^{c}$

$= 0.053^{c}$ (প্রায়)

$\therefore$ ঢাকা ও রাজশাহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $s = r\theta$

$= (6440 \times 0.053)$ কি.মি.

$= 341.32$ কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয়, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ $= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta$ এর সম্ভাব্য সকল মান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা : 1, 3, 5

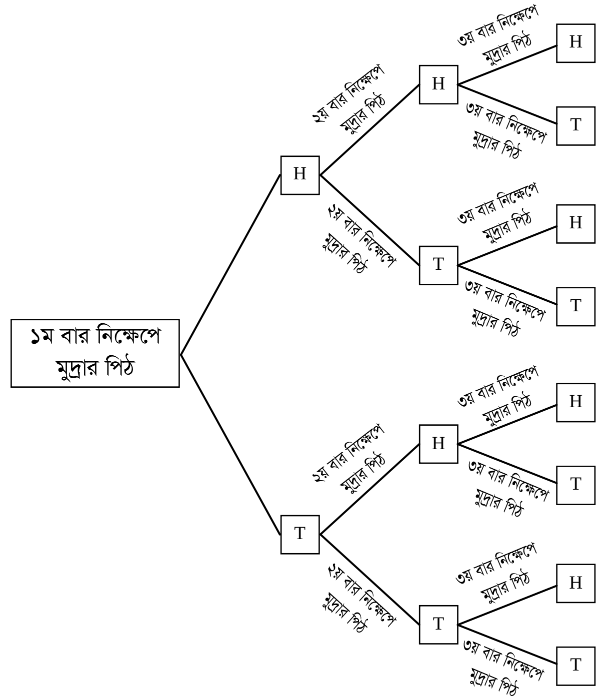
মৌলিক সংখ্যা : 2, 3, 5

ছক্কায় মোট সংখ্যা আছে 6টি

বিজোড় ও মৌলিক সংখ্যা আছে 2টি

$\therefore$ বিজোড় এবং মৌলিক সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপের Probability tree হবে :



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্র, S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH, THH, TTT}

নমুনাক্ষেত্র হতে দেখা যায়

মোট সম্ভাব্য ঘটনা = 8

বড়জোর 2টি T পাওয়ার ঘটনা = 7

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

গ ঝুড়িতে কালো বল আছে 10টি, লাল বল আছে 7টি এবং সাদা বল আছে 5টি

মোট বল আছে = 10 + 7 + 5 = 22টি

প্রতিস্থাপন না করে,

১ম বার বল উঠালে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{22}$

২য় বার বল উঠালে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{21}$

৩য় বার বল উঠালে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{20}$

$\therefore$ প্রতিস্থাপন না করে তিন বারই লাল বল আসার সম্ভাবনা

$= \frac{7}{22} \times \frac{6}{21} \times \frac{5}{20} = \frac{1}{44}$ **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৩

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	গ	২	গ	৩	গ	৪	গ	৫	খ	৬	গ	৭	গ	৮	ক	৯	ঘ	১০	ঘ	১১	ঘ	১২	ক	১৩	ক
	১৪	গ	১৫	ঘ	১৬	গ	১৭	খ	১৮	ঘ	১৯	ক	২০	খ	২১	খ	২২	খ	২৩	খ	২৪	ঘ	২৫	গ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(a, b, c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

এখন, প্রদত্ত রাশিতে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c এর স্থলে a বসিয়ে পাই,

$f(b, c, a) = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = f(a, b, c)$

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$

এখন, F(x, y, z) = 0 হলে, $x^{-3} + y^{-3} + z^{3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1} = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - 3 . \frac{1}{x} . \frac{1}{y} . \frac{1}{z} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 - 3 . \frac{1}{x} . \frac{1}{y} . \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

$\therefore xy + yz + zx = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

কিন্তু কতকগুলো বর্গরাশির যোগফল শূন্য হলে, এরা পৃথকভাবে শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$ বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \therefore x = y$

$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$ বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \therefore y = z$

$\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$ বা, $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0 \therefore z = x$

সুতরাং, (xy + yz + zx) = 0 এবং x = y = z. **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $a = y + z - x$

$b = z + x - y$

$c = x + y - z$

$\therefore a + b + c = y + z - x + z + x - y + x + y - z = x + y + z$

$a - b = y + z - x - z - x + y = 2y - 2x$

$b - c = z + x - y - x - y + z = 2z - 2y$

এবং $c - a = x + y - z - y - z + x = 2x - 2z$

বামপক্ষ $= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(2y - 2x)^2 + (2z - 2y)^2 + (2x - 2z)^2\}$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[\{-2(x - y)\}^2 + \{-2(y - z)\}^2 + \{-2(z - x)\}^2]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{4(x - y)^2 + 4(y - z)^2 + 4(z - x)^2\}$

$= 4 \times \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

= ডানপক্ষ

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$. **(প্রমাণিত)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা $= \frac{1}{6x + 1} + \frac{1}{(6x + 1)^2} + \frac{1}{(6x + 1)^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ $= \frac{1}{6x + 1}$ এবং ২য় পদ $= \frac{1}{(6x + 1)^2}$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(6x + 1)^2}}{\frac{1}{6x + 1}}$

$= \frac{1}{(6x + 1)^2} \times (6x + 1) = \frac{1}{6x + 1}$

এখন, x = 1 হলে, $r = \frac{1}{6.1 + 1} = \frac{1}{6 + 1} = \frac{1}{7}$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{7}$.

খ প্রদত্ত ধারাটি $= \frac{1}{6x + 1} + \frac{1}{(6x + 1)^2} + \frac{1}{(6x + 1)^3} + ...$

এখন, $x = \frac{1}{3}$ হলে ধারাটি,

$\frac{1}{6.\frac{1}{3} + 1} + \frac{1}{\left(6.\frac{1}{3} + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(6.\frac{1}{3} + 1\right)^3} + ...$

$= \frac{1}{2 + 1} + \frac{1}{(2 + 1)^2} + \frac{1}{(2 + 1)^3} ....$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} ....$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা

যার ১ম পদ, $a = \frac{1}{3}$, সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ১ম 10টি পদের সমষ্টি, $S_{10} = \frac{a(1 - r^{10})}{1 - r}$ $[\because r < 1]$

$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)}{\frac{3 - 1}{3}}$

$= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3^{10} - 1}{3^{10}}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{3^{10} - 1}{3^{10}}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{3^{10} - 1}{2 \times 3^{10}} = \frac{59048}{118098}$

$\therefore$ নির্ণেয় ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি $\frac{59048}{118098}$

গ প্রদত্ত ধারাটি : $\frac{1}{6x+1}+\frac{1}{(6x+1)^2}+\frac{1}{(6x+1)^3}+......$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{6x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{6x+1}$ ['ক' হতে]

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হয়।

$\therefore -1 < \frac{1}{6x+1} < 1$

এখন, $-1 < \frac{1}{6x+1}$

বা, $-1 > 6x + 1$

বা, $6x + 1 < -1$

বা, $6x < -1 - 1$

বা, $x < \frac{-2}{6}$

$\therefore x < \frac{-1}{3}$

এবং, $\frac{1}{6x+1} < 1$

বা, $6x + 1 > 1$

বা, $6x > 1 - 1$

বা, $6x > 0$

বা, $x > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{6x+1}}{1-\frac{1}{6x+1}} = \frac{\frac{1}{6x+1}}{\frac{6x+1-1}{6x+1}}$$

$$= \frac{1}{6x+1} \times \frac{6x+1}{6x} = \frac{1}{6x}$$

নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{1}{3}$ অথবা $x > 0$ এবং সমষ্টি $\frac{1}{6x}$.

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $25^a = 125^b$

বা, $(5^2)^a = (5^3)^b$

বা, $5^{2a} = 5^{3b}$

বা, $2a = 3b$

বা, $a = \frac{3b}{2}$

$\therefore \frac{3a}{2b} = \frac{3\frac{3b}{2}}{2b} = \frac{9b}{4b} = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $D = p - 3 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}$

প্রশ্নমতে, $p - 3 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $p - 3 = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}$

বা, $(p-3)^3 = \left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 - 3p^2.3 + 3p.3^2 - 3^3 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.5^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{1}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 5^2 + 5 + 3.5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(p-3)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 30 + 3.5^{\frac{3}{3}}(p-3)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 30 + 15p - 45$

$\therefore p^3 - 9p^2 + 12p = 12$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $C = \frac{\log_k(y+5)}{\log_k y}$

প্রশ্নমতে, $\frac{\log_k(y+5)}{\log_k y} = 2$

বা, $\log_k(y+5) = 2\log_k y$

বা, $\log_k(y+5) = \log_k y^2$

বা, $y + 5 = y^2$

বা, $y^2 - y - 5 = 0$

$\therefore y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-5)}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$ax^2 + bx + c = 0$ হলে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

কিন্তু $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ ঋণাত্মক হওয়ায় তা গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore y = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$ **(প্রমাণিত)**

৪নং প্রশ্নের সমাধান

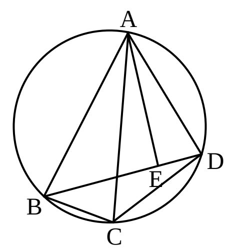
ক দেওয়া আছে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = 3 সেমি

$\therefore$ ত্রিভুজটির মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি $= \frac{3}{2} \times$ (অতিভুজ)^2

$= \frac{3}{2} \times 3^2$ বর্গ সেমি

$= \frac{27}{2}$ বর্গ সেমি **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন :** ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও DC এবং AD ও BC। AC ও BD চতুর্ভুজটির দুটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD।



অঙ্কন : $\angle BAC < \angle DAC$ বলে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান $\angle DAE$ আঁকি যেন AE রেখাংশ BD কর্ণকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAC = \angle DAE$

বা, $\angle BAC + \angle EAC = \angle DAE + \angle EAC$

$\therefore \angle BAE = \angle DAC$

এখন, ΔABE ও ΔADC এর মধ্যে $\angle BAE = \angle DAC$

$\angle ABE = \angle ACD$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle AEB$ = অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore \Delta ABE$ ও ΔADC সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC}$

অর্থাৎ, AC.BE = AB.CD ... ... (i)

আবার, ΔABC ও ΔAED এর মধ্যে,

$\angle BAC = \angle DAE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ACB = \angle ADE$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC$ = অবশিষ্ট $\angle AED$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAED সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$

অর্থাৎ, AC.DE = BC.AD ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

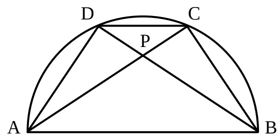
AC.BE + AC.DE = AB.CD + BC.AD

বা, AC(BE + DE) = AB.CD + BC.AD

$\therefore$ AC.BD = AB.CD + BC.AD [$\because$ BE + DE = BD]

(প্রমাণিত)

গ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত। AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$।



অঙ্কন : A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCPD ও ΔAPB-এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

অবশিষ্ট $\angle PCD$ = অবশিষ্ট $\angle PBA$

$\therefore \Delta CPD$ ও ΔAPB সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AP}{DP} = \dfrac{BP}{CP}$

বা, $AP.CP = BP.DP$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$ [উভয়পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP(CP + AP) = BP.DP + DP^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$; $\therefore AP^2 = AD^2 + DP^2$ এবং $AB^2 = AD^2 + BD^2$]

বা, $AP.AC = BP.DP + DP^2 + AB^2 - BD^2$

বা, $AP.AC = DP\,(BP + DP) + AB^2 - BD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$

বা, $AP.AC = -\,BD\,(BD - DP) + AB^2$

বা, $AP.AC = -\,BD.BP + AB^2$

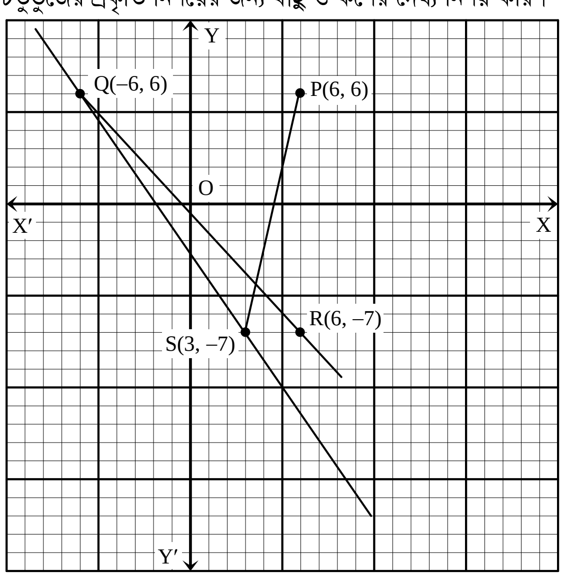
$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক $Q(-6, 6)$ ও $S(3, -7)$ বিন্দুগামী QS সরলরেখার ঢাল, $m = \dfrac{6+7}{-6-3} = \dfrac{13}{-9} = -\dfrac{13}{9}$

আমরা জানি, ঋণাত্মক ঢালবিশিষ্ট সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, QS রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ তৈরি করবে। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো $P(6, 6)$, $Q(-6, 6)$, $R(6, -7)$ এবং $S(3, -7)$। বিন্দু চারটি দিয়ে গঠিত PQSR চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয়ের জন্য বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



বাহু, $PQ = \sqrt{(6+6)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{12^2 + 0} = 12$ একক

বাহু, $QS = \sqrt{(-6-3)^2 + (6+7)^2} = \sqrt{81 + 169} = 5\sqrt{10}$ একক

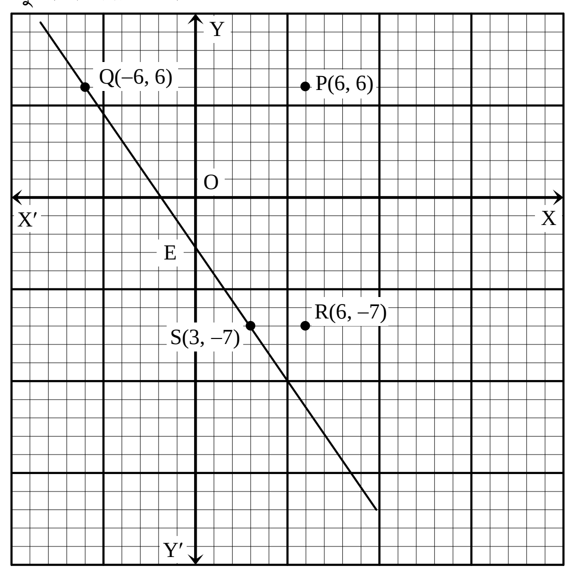
বাহু, $SR = \sqrt{(3-6)^2 + (-7+7)^2} = \sqrt{9+0} = 3$ একক

বাহু, $PR = \sqrt{(6-6)^2 + (6+7)^2} = \sqrt{169} = 13$ একক

যেহেতু চতুর্ভুজের বাহুগুলো পরস্পর অসমান তাই কর্ণগুলোও অসমান হবে। আবার, PQ বাহুর P ও Q বিন্দুর কোটি সমান হওয়ায় PQ সরলরেখা এবং SR বাহুর S ও R বিন্দুদ্বয়ের কোটি সমান হওয়ায় SR সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ এরা পরস্পর সমান্তরাল।

যেহেতু চতুর্ভুজের একজোড়া বাহু সমান্তরাল এবং কোনো বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান নয় তাই চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম।

গ PQSR চতুর্ভুজের $S(3, -7)$ ও $R(6, -7)$ বিন্দুদ্বয় চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।



মনে করি, QS রেখা y-অক্ষকে $E(0, a)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

QS রেখার সমীকরণ, $\dfrac{y-6}{6+7} = \dfrac{x+6}{-6-3}$

বা, $13x + 78 = -\,9y + 54$

বা, $13x + 9y + 24 = 0$ ... ... (i)

(i) নং রেখা $(0, a)$ বিন্দুগামী হওয়ায়, $13 \times 0 + 9 \times a + 24 = 0$

বা, $9a = -\,24$ $\therefore a = -\dfrac{24}{9} = -\dfrac{8}{3}$

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, -\dfrac{8}{3}\right)$

P ও R বিন্দুর ভুজ 6 হওয়ায় PR রেখা x-অক্ষকে $F(6, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে PQSR চতুর্ভুজের চতুর্থ চতুর্ভাগের অংশটি হবে OESRF যেখানে $O(0, 0)$ মূলবিন্দু।

$\therefore$ প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে OESRF অংশের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -8/3 & -7 & -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \dfrac{1}{2}|0 + 0 - 21 + 0 + 0 - 0 + 8 + 42 + 42 + 0|$ বর্গএকক

$= \dfrac{1}{2} \times 71$ বর্গএকক

$= 35.5$ বর্গএকক **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাস = 9 সেমি

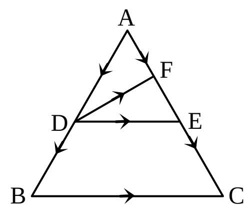
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{9}{2} = 4.5$ সেমি

$\therefore$ পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2 = 4\pi.(4.5)^2$ বর্গ সেমি

$= 254.5$ বর্গ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ,

DE $\parallel$ BC। প্রমাণ করতে হবে যে, AC এর মধ্যবিন্দু E।



মনে করি, E নয় বরং F, AC এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ D, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because$ F, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ [$\because \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$]

$= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{AF}$ এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

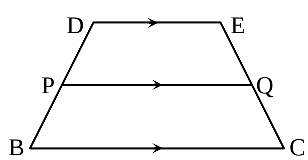
$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$]

অর্থাৎ, DF $\parallel$ BC. কিন্তু DE $\parallel$ BC [দেওয়া আছে]

তাহলে DE ও DF রেখাদ্বয় উভয়েই D বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ, DE ও DF) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore$ E ও F একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ, E, AC এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, BDEC ট্রাপিজিয়ামের BD ও CE বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং DE ও BC বাহুদ্বয় সমান্তরাল। P ও Q যথাক্রমে BD ও CE এর মধ্যবিন্দু। P, Q যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, DE $\parallel$ PQ $\parallel$ BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে C, B, D, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{c}, \underline{b}, \underline{d}, \underline{e}$।

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}, \overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [$\because$ P, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$ [$\because$ Q, CE এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e} - \underline{d} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right)$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ, BC ও DE এর) সমান্তরাল হবে।

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right|$

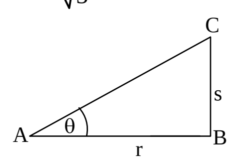
$\therefore$ PQ $\parallel$ DE $\parallel$ BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$ **(প্রমাণিত)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{6\pi + \pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ



A বিন্দু থেকে r দূরত্বে BC পাহাড়ের উচ্চতা s = 8.848 কিলোমিটার।

A বিন্দুতে পাহাড়ের শীর্ষবিন্দু C এর উন্নতি কোণ, $\theta = 2.25°$

$= \left(2.25 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2.25 \times 3.1416}{180}\right)^c = 0.03927^c$

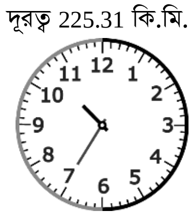
আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $r = \frac{s}{\theta}$ কি.মি. $= \frac{8.848}{0.03927}$ কি.মি.

$= 225.31$ কি.মি. (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব 225.31 কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ



আমরা জানি,

ঘড়িতে সর্বমোট 12টি ঘণ্টার দাগ কাটা থাকে।

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 12 ঘণ্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে 360°

$\therefore$,, ,, ,, 1 ,, ,, ,, ,, $\frac{360°}{12} = 30°$

$\therefore$,, ,, ,, 1 মিনিট ,, ,, ,, $\frac{30°}{60} = 0.5°$

[$\because$ এক ঘণ্টা = 60 মিনিট]

$\therefore$,, ,, ,, 35 মিনিট ,, ,, $= (35 \times 0.5)°$

$= 17.5°$

$\therefore$ 10:35 টায় ঘড়িতে ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ $= 3 \times 30° + 17.5°$

$= 90° + 17.5°$

$= 107.5°$

$= \left(107.5 \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান

$= 1.876233$ রেডিয়ান

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ : 1.876233 রেডিয়ান **(Ans.)**

<u>**৮নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

ক ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 6 টি।

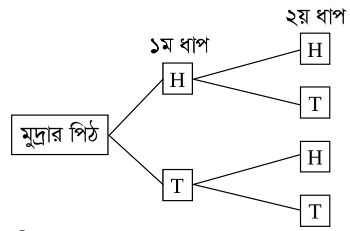
ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল = 3টি।

যথা : 1, 3, 5

$\therefore$ ছক্কা নিক্ষেপে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপকে দুই ধাপ বিবেচনা করি। মুদ্রা নিক্ষেপের প্রতি ধাপে দুইটি ফলাফল {H, T} আসতে পারে। পরীক্ষার মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিচে দেখানো হলো :

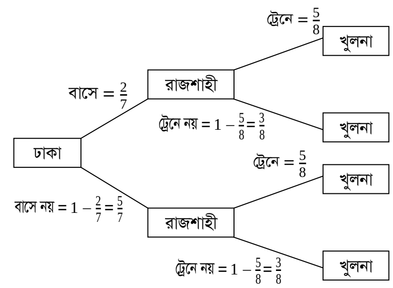


দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র {HH, HT, TH, TT}.

মোট নমুনা বিন্দু 4টি।

$\therefore$ HH আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

গ সম্ভাবনার মাধ্যমে Probability tree নিচে দেখানো হলো :



$\therefore$ জুড়ির রাজশাহী বাসে না যাওয়ার এবং খুলনায় ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{56}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{15}{56}$ **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৪

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	গ	২	গ	৩	গ	৪	ঘ	৫	খ	৬	খ	৭	ক	৮	ঘ	৯	ঘ	১০	ক	১১	ক	১২	গ	১৩	ক
	১৪	ঘ	১৫	খ	১৬	ক	১৭	ক	১৮	ঘ	১৯	গ	২০	খ	২১	ক	২২	গ	২৩	গ	২৪	ঘ	২৫	ক		

সৃজনশীল

<u>**১নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

ক দেওয়া আছে, $3 - 4x - x^2 = 0$

বা, $-x^2 - 4x + 3 = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = -1, b = -4$ এবং $c = 3$

$\therefore$ নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(-1).3$

$= 16 + 12$

$= 28$ **(Ans.)**

খ মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ x মিটার

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= (2x - 10)$ মিটার

শর্তমতে, $(2x - 10)x = 1000$

বা, $2x^2 - 10x - 1000 = 0$

বা, $x^2 - 5x - 500 = 0$

বা, $x^2 - 25x + 20x - 500 = 0$

বা, $x(x - 25) + 20(x - 25) = 0$

$\therefore x = 25$ [$\because x \neq -20$, কারণ প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ = 25 মিটার

এবং দৈর্ঘ্য $= (2 \times 25 - 10)$ মিটার

$= (50 - 10)$ মিটার

$= 40$ মিটার

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা = 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

$= 2(40 + 25)$ মিটার

$= (2 \times 65)$ মিটার

$= 130$ মিটার **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P = a^2 - 9a - 6$

এবং $Q = a^3 + a^2 - 6a$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{a^2 - 9a - 6}{a^3 + a^2 - 6a} = \frac{a^2 - 9a - 6}{a(a^2 + a - 6)}$

$= \frac{a^2 - 9a - 6}{a(a^2 + 3a - 2a - 6)}$

$= \frac{a^2 - 9a - 6}{a\{a(a + 3) - 2(a + 3)\}}$

$= \frac{a^2 - 9a - 6}{a(a + 3)(a - 2)}$

ধরি, $\frac{a^2-9a-6}{a(a+3)(a-2)} \equiv \frac{A}{a}+\frac{B}{a+3}+\frac{C}{a-2}$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $a(a+3)(a-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$a^2-9a-6 \equiv A(a+3)(a-2)+Ba(a-2)+Ca(a+3)$

বা, $a^2-9a-6 \equiv A(a^2+a-6)+B(a^2-2a)+C(a^2+3a)$

বা, $a^2-9a-6 \equiv (A+B+C)a^2+(A-2B+3C)a-6A$ ... ... (ii)

(ii) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A+B+C=1$ ... ... (iii)

$A-2B+3C=-9$ ... ... (iv)

এবং $-6A=-6$

$\therefore A=1$

A এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $1+B+C=1$

বা, $B+C=0$

$\therefore 2B+2C=0$ ... ... (v)

(iv) ও (v) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $1+5C=-9$

বা, $5C=-10$

$\therefore C=-2$

C এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই, $2B+2(-2)=0$

বা, $2B=4$

$\therefore B=2$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{a^2-9a-6}{a(a+3)(a-2)} \equiv \frac{1}{a}+\frac{2}{a+3}-\frac{2}{a-2}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y=\frac{5-x}{5+x}$

$y \in R$ হবে যদি ও কেবল যদি, $5+x \neq 0$

বা, $x \neq -5$ হয়

$\therefore$ ডোম $y = R-\{-5\}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y=\frac{5-x}{5+x}$

ধরি, $y=f(x)$

$\therefore x=f^{-1}(y)$

এখন, $y=\frac{5-x}{5+x}$

বা, $5y+xy=5-x$

বা, $xy+x=5-5y$

বা, $x(1+y)=5(1-y)$

বা, $x=\frac{5(1-y)}{1+y}$

বা, $f^{-1}(y)=\frac{5(1-y)}{1+y}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{5(1-x)}{1+x}$ [চলক পরিবর্তন করে]

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ফাংশন : $\frac{5(1-x)}{1+x}$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $p=1+\log_x(yz)$

$= \log_x x+\log_x(yz)$

$= \log_x(xyz)$

$q = 1+\log_y(zx)$

$= \log_y y+\log_y(zx)$

$= \log_y(xyz)$

এবং $r=1+\log_z(xy)$

$= \log_z z+\log_z(xy)$

$= \log_z(xyz)$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$

$= \frac{1}{\log_x(xyz)}+\frac{1}{\log_y(xyz)}+\frac{1}{\log_z(xyz)}$

$= \log_{xyz}x+\log_{xyz}y+\log_{xyz}z$ $\quad [\because \log_a b=\frac{1}{\log_b a}]$

$= \log_{xyz}(xyz)$

$= 1$ $\quad [\because \log_a a=1]$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. **(দেখানো হলো)**

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_x \sqrt[4]{256}=2$

বা, $x^2=\sqrt[4]{256}$ $\quad [\because \log_a N=x$ হলে $a^x=N]$

বা, $x^2=(4^4)^{1/4}$

বা, $x^2=4$ $\therefore x=2$ [$x>0$ বলে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $x=2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A=\left(p-\frac{x}{2}\right)^n$

$=\left(p-\frac{x}{2}\right)^6$ $[\because n=6]$

$=p^6+{}^6c_1\,p^5\left(-\frac{x}{2}\right)^1+{}^6c_2\,p^4\left(-\frac{x}{2}\right)^2+{}^6c_3\,p^3\left(-\frac{x}{2}\right)^3+...$

$=p^6-6.p^5.\frac{x}{2}+\frac{6.5}{1.2}.p^4.\frac{x^2}{4}-\frac{6.5.4}{1.2.3}.p^3.\frac{x^3}{8}+........$

$=p^6-3p^5x+\frac{15}{4}p^4x^2-\frac{5}{2}p^3x^3+.........$

প্রশ্নমতে, $-\frac{5}{2}p^3=-20$

বা, $p^3=\frac{20\times 2}{5}$

বা, $p^3=8$

বা, $p^3=2^3$

$\therefore p=2$

$\therefore$ নির্ণেয় $p=2$. **(Ans.)**

গ $p=1$ এবং $x=8$ হলে, $A=\left(1-\frac{x}{2}\right)^8$

$\therefore (2-x)A=(2-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)^8$

$=(2-x)\left\{1+{}^8C_1\left(-\frac{x}{2}\right)^1+{}^8C_2\left(-\frac{x}{2}\right)^2+{}^8C_3\left(-\frac{x}{2}\right)^3+...\right\}$

$=(2-x)\left(1-\frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2}+\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4}-\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8}+...\right)$

$=(2-x)(1-4x+7x^2-7x^3+.......)$

$=2-8x+14x^2-14x^3+.......-x+4x^2-7x^3+7x^4........$

$\therefore (2-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)^8=2-9x+18x^2-21x^3+.............$

শর্তমতে, $2-x=1.9$

বা, $x=2-1.9$ $\therefore x=0.1$

বিস্তৃতিতে $x=0.1$ বসিয়ে পাই,

$\therefore (2-0.1)\left(1-\frac{0.1}{2}\right)^8=2-9\times0.1+18(0.1)^2-21(0.1)^3+......$

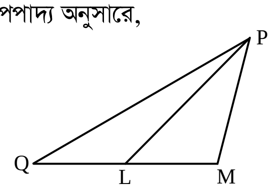
$\therefore 1.9\times(0.95)^8=2-0.9+0.18-0.021+........$

$=1.259$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=1.259$ (প্রায়)। **(Ans.)**

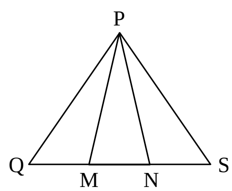
৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, PQ = 6 সে.মি., QM = 4 সে.মি.
এবং PM = 5 সে.মি.
যেহেতু L, QM এর মধ্যবিন্দু
সুতরাং, $QL = \frac{1}{2} QM = \frac{1}{2} \times 4$ সে.মি. = 2 সে.মি.
ΔPQM এ অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,
$PQ^2 + PM^2 = 2(PL^2 + QL^2)$
বা, $(6)^2 + (5)^2 = 2(PL^2 + 2^2)$
বা, $36 + 25 = 2PL^2 + 8$
বা, $2PL^2 = 53$
বা, $PL^2 = \frac{53}{2}$



$\therefore PL = \sqrt{\frac{53}{2}} = 5.15$ সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

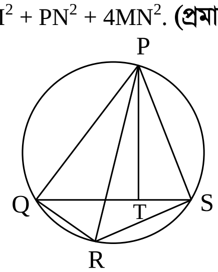
খ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, PQS ত্রিভুজের QS বাহু M ও N বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PS^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$.

প্রমাণ : ΔPQN-এ QM = MN [অঙ্কনানুসারে]
তাহলে, PM, ΔPQN-এর মধ্যমা যা QN কে M বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
$\therefore PQ^2 + PN^2 = 2PM^2 + 2MN^2$....................................(i)
আবার, PN, ΔPMS এর মধ্যমা যা MS কে N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
$\therefore PS^2 + PM^2 = 2PN^2 + 2MN^2$ ....(ii)
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$PQ^2 + PS^2 + PN^2 + PM^2 = 2PM^2 + 2PN^2 + 4MN^2$
বা, $PQ^2 + PS^2 = 2PM^2 + 2PN^2 + 4MN^2 - PN^2 - PM^2$
$\therefore PQ^2 + PS^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$. **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটি কর্ণ। PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS।

অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$ এর সমান করে $\angle SPT$ আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle QPR = \angle SPT$
বা, $\angle QPR + \angle RPT = \angle SPT + \angle RPT$ [$\angle RPT$ যোগ করে]
$\therefore \angle QPT = \angle RPS$
এখন, ΔPQT ও ΔPRS এর মধ্যে
$\angle QPT = \angle RPS$, $\angle PQS = \angle PRS$
[$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]
এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$
$\therefore$ ΔPQT ও ΔPRS সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$
অর্থাৎ PR . QT = PQ . RS .... (i)
আবার, ΔPQR ও ΔPTS এর মধ্যে
$\angle QPR = \angle SPT$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle PRQ = \angle PST$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]
এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PTS$
$\therefore$ ΔPQR ও ΔPTS সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$
বা, PR . ST = QR . PS .... (ii)
(i) ও (ii) যোগ করে পাই,
PR . QT + PR . ST = PQ . RS + QR . PS
বা, PR (QT + ST) = PQ . RS + QR . PS
$\therefore$ PR . QS = PQ . RS + QR . PS [$\because$ QT + ST = QS]
$\therefore$ PR . QS = PQ . RS + QR . PS. **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $3x - y + 4 = 0$
বা, $y = 3x + 4$ .... (i)
(i) নং রেখাটিকে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
ঢাল, m = 3 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $3x - y + 4 = 0$ .... (i)
$y = 10 - 3x$ .... (ii)
(i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের সমাধানই হবে এদের ছেদবিন্দু R.
(i) নং এ $y = 10 - 3x$ বসিয়ে পাই, $3x - (10 - 3x) + 4 = 0$
বা, $3x - 10 + 3x + 4 = 0$
বা, $6x = 6$
$\therefore x = 1$
(ii) নং সমীকরণে x = 1 বসিয়ে পাই, $y = 10 - 3 \times 1$
$= 10 - 3 = 7$
$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 7)
$\therefore$ R (1, 7) বিন্দুগামী এবং 2 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,
$y - 7 = 2(x - 1)$
বা, $y - 7 = 2x - 2$
$\therefore 2x - y + 5 = 0$ **(Ans.)**

গ $3x - y + 4 = 0$ রেখাটি x অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করে,
সুতরাং রেখাটির কোটি y = 0 হবে,
$\therefore 3x - 0 + 4 = 0$
বা, $x = -\frac{4}{3}$
$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
আবার, $y = 10 - 3x$ রেখাটি y অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে,
সুতরাং রেখাটির ভুজ x = 0 হবে,
$\therefore y = 10 - 0$
বা, $y = 10$
$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 10)

'খ' হতে পাই, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 7)

$\therefore$ ΔPQR এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 10 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{40}{3}+0+0\right)-\left(0+10-\frac{28}{3}\right)\right|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\left|-\frac{40}{3}-10+\frac{28}{3}\right|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|-4-10|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|-14|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\times 14 = 7$ বর্গ একক। **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত গোলকের ব্যাস = 4 সেমি

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{4}{2} = 2$ সেমি

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$

$= 4 \times 3.1416 \times 2^2$ বর্গ সেমি

$= 50.2656$ বর্গ সেমি **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

বেলনের উচ্চতা, $h = 8$ সেমি

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = 6$ সেমি

$\therefore$ বেলনের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$ বর্গএকক

$= 2 \times 3.1416 \times 6 \times (6 + 8)$ বর্গ সেমি

$= 527.7888$ বর্গ সেমি

ধরি, ঘনকের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = a সেমি

তাহলে ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গসেমি

শর্তমতে, $6a^2 = 527.7888$

বা, $a^2 = \frac{527.7888}{6} = 87.9648$

$\therefore a = 9.38$ (প্রায়)

$\therefore$ ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য 9.38 সেমি **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, বেলনের উচ্চতা $h = 8$ সেমি এবং

ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 6$ সেমি

প্রদত্ত লোহার তৈরি বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3.1416 \times 6^2 \times 8$ ঘন সেমি

$= 904.7808$ ঘন সেমি

6 সেমি ব্যাসের বা 3 সেমি ব্যাসার্ধের নিরেট গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 3^3$

$= 113.0976$ ঘন সেমি

ধরি, বেলনে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে 6 সেমি ব্যাসের n সংখ্যক গোলক তৈরি করা যাবে।

$\therefore n \times 113.0976 = 904.7808$

বা, $n = \frac{904.7808}{113.0976} = 8$

অতএব বেলনে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে ৪টি নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে। **(Ans.)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $33° \, 12' \, 36'' = 33°\left(12 + \frac{36}{60}\right)'$

$= 33°\left(12 + \frac{3}{5}\right)'$

$= \left(33 + \frac{63}{5 \times 60}\right)°$

$= \left(\frac{9900 + 63}{300}\right)°$

$= \left(\frac{9963}{300}\right)°$

$= \left(\frac{9963}{300} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান

$= \left(\frac{9963 \times 3.1416}{300 \times 180}\right)$ রেডিয়ান

$= 0.5796$ রেডিয়ান

$\therefore 33° \, 12' \, 36'' = 0.5796$ রেডিয়ান (প্রায়)। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $7\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = p$ এবং $p = 4$

$\therefore 7\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 4$

বা, $7\cos^2\theta + 3(1 - \cos^2\theta) = 4$

বা, $7\cos^2\theta + 3 - 3\cos^2\theta = 4$

বা, $4\cos^2\theta = 4 - 3$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$

$\cot^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \cot\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$A = \sec\theta + \tan\theta$ এবং $A = \sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $(1 + \sin\theta) = \sqrt{3}\cos\theta$

বা, $(1 + \sin\theta)^2 = (\sqrt{3}\cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta = 3(1 - \sin^2\theta)$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta = 3 - 3\sin^2\theta$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - 3 + 3\sin^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + 2\sin\theta - \sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta + 1) - 1(\sin\theta + 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$

হয়, $2\sin\theta - 1 = 0$
বা, $2\sin\theta = 1$
বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

অথবা, $\sin\theta + 1 = 0$
বা, $\sin\theta = -1$
বা, $\sin\theta = \sin\frac{3\pi}{2}$
$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$

১ম চতুর্ভাগে,
$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

আবার, ২য় চতুর্ভাগে,
$\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
বা, $\sin\theta = \sin\frac{6\pi - \pi}{6}$
বা, $\sin\theta = \sin\frac{5\pi}{6}$
$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

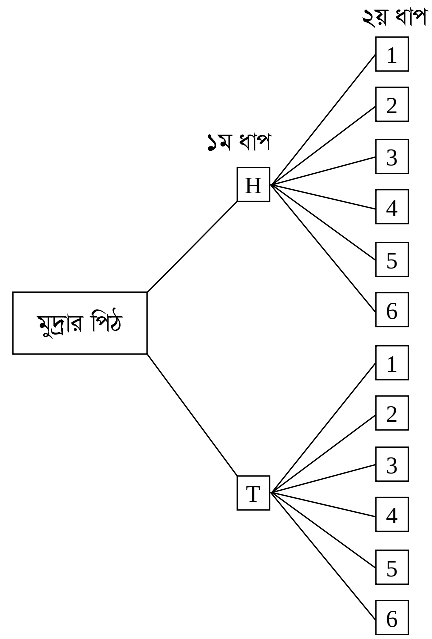
কিন্তু $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ না করায় θ এর এই মানদ্বয় গ্রহণযোগ্য নয়।

নির্ণেয় মান : $\theta = \frac{\pi}{6}$. **(Ans.)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, সেপ্টেম্বর মাস = 30 দিন
বৃষ্টি হয়েছে = 12 দিন
$\therefore$ বৃষ্টি হয়নি = (30 – 12) = 18 দিন
$\therefore$ 5 সেপ্টেম্বর বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

খ একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে ছয়টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। ঘটনাগুলোর মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিচের চিত্রে দেখানো হলো :



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি :
S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 12টি।

গ দেওয়া আছে, মোট টিকেট = 22টি
31 হতে 52 পর্যন্ত জোড় সংখ্যাগুলো : 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52
এবং 9 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো : 36, 45
আমরা জানি,

কোন ঘটনার সম্ভাবনা = $\frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}$

এখানে, সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 22
এবং উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল = 12
[$\because$ 36 জোড় এবং 9 এর গুণিতক উভয়ই]
$\therefore$ P (জোড় অথবা 9 এর গুণিতক) = $\frac{12}{22} = \frac{6}{11}$ **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৫

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	ঘ	২	খ	৩	ঘ	৪	ক	৫	খ	৬	ঘ	৭	খ	৮	ঘ	৯	খ	১০	ক	১১	ঘ	১২	খ	১৩	গ
	১৪	গ	১৫	খ	১৬	ক	১৭	খ	১৮	ঘ	১৯	গ	২০	গ	২১	গ	২২	ঘ	২৩	খ	২৪	খ	২৫	খ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $g(x) = x^2 + 6x - a$
$(x + 2)$, $g(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি $g(-2) = 0$ হয়।
এখন, $g(-2) = 0$
বা, $(-2)^2 + 6(-2) - a = 0$
বা, $4 - 12 = a$
$\therefore a = -8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ এবং $Q = 0$
অর্থাৎ, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$
বা, $(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz = 0$
বা, $(x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = 0$
বা, $(x + y + z)^3 - 3(x + y).z.(x + y + z) - 3xy(x + y + z) = 0$
বা, $(x + y + z)\{(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy\} = 0$
বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 3zx - 3yz - 3xy) = 0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $\frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz) = 0$

বা, $\frac{1}{2}(x + y + z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2) = 0$

$\therefore (x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$

হয়, $x + y + z = 0$

অথবা, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$

আমরা জানি, কতগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে, রাশিগুলোর মানও পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

$x - y = 0$ $\therefore x = y$ ... ... (i)	$y - z = 0$ $\therefore y = z$ ... ... (ii)	$z - x = 0$ $\therefore z = x$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে পাই, $x = y = z$

সুতরাং, $x + y + z = 0$ অথবা, $x = y = z$ **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 4x - 3x - 6$

$= x^2(x + 2) + 2x(x + 2) - 3(x + 2)$

$= (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$

$= (x + 2)(x^2 + 3x - x - 3)$

$= (x + 2)(x + 3)(x - 1)$

সুতরাং, $\frac{x^3}{P(x)} = \frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)(x - 1)}$

ধরি, $\frac{x^3}{(x+2)(x+3)(x-1)} \equiv 1 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 2)(x + 3)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (x + 2)(x + 3)(x - 1) + A(x + 3)(x - 1) + B(x + 2)(x - 1) + C(x + 2)(x + 3)$ ... ... (ii)

(ii) নং এ $x = - 2$ বসিয়ে পাই,

$(- 2)^3 = 0 + A(- 2 + 3)(- 2 - 1) + 0 + 0$

বা, $- 8 = - 3A \therefore A = \frac{8}{3}$

(ii) নং এ $x = - 3$ বসিয়ে পাই, $(- 3)^3 = B(- 3 + 2)(- 3 - 1)$

বা, $- 27 = 4B \therefore B = \frac{- 27}{4}$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $(1)^3 = C(1 + 2)(1 + 3)$

বা, $1 = 12C \therefore C = \frac{1}{12}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^3}{(x+2)(x+3)(x-1)} = 1 + \frac{8}{3(x+2)} - \frac{27}{4(x+3)} + \frac{1}{12(x-1)}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত অনুক্রম, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$, ...

$= \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$, ...

$= \left(\frac{2}{3}\right)^0, \left(\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, ... \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

অর্থাৎ, অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore$ অনুক্রমটির ৯ম পদ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{9-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$

$= \frac{256}{6561}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $X = 8 + 88 + 888 +$ ....

বা, $X = 8 + 88 + 888 +$ .... n তম পদ

বা, $X = 8(1 + 11 + 111 +$ .... n তম পদ)

বা, $\frac{X}{8} = 1 + 11 + 111 +$ .... n তম পদ

বা, $\frac{9X}{8} = 9 + 99 + 999 +$ ....

বা, $\frac{9X}{8} = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) +$ .....

বা, $\frac{9X}{8} = (10 + 100 + 1000 + ...$ n তম পদ) $- (1 + 1 + 1 + ...$ n তম পদ)

বা, $\frac{9X}{8} = (10 + 10^2 + 10^3 +$ ...... n তম পদ) $- n$

বা, $\frac{9X}{8} = 10.\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n$

বা, $X = \frac{8}{9}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$

$\therefore$ X ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8}{9}n$

(Ans.)

গ দেওয়া আছে, $Y = 5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} +$ ....

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অন্তর, $r = \frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ বা n তম পদ $= ar^{n-1} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

যেহেতু, ধারাটির সাধারণ অন্তর, $r = \frac{2}{3}$ অর্থাৎ $|r| < 1$.

সুতরাং, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ Y ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$= \frac{5}{1 - \frac{2}{3}}$

$= \frac{5}{\frac{1}{3}}$

$= 15$. **(Ans.)**

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $5^x.5^2 = (5x)^2$

বা, $5^{x+2} = 5^{2x}$

$\therefore x + 2 = 2x$

বা, $x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় $x = 2$

খ দেওয়া আছে, $A = \frac{a^3 + a^{-3} - 2}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2}$

$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 - 2 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{-3}{2}} + \left(a^{\frac{-3}{2}}\right)^2}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2}$

$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{-3}{2}}\right)^2}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2\right)}$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 - 4 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{-3}{2}}}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 - 4}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 - 2^2}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 2\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2\right)}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 2\right)}$$

$= a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = 3$

বা, $4^y - 3 \cdot 2^{y+2} + 35 = 3$

বা, $(2^y)^2 - 3 \cdot 2^y \cdot 2^2 + 35 - 3 = 0$

বা, $(2^y)^2 - 12 \cdot 2^y + 32 = 0$

বা, $a^2 - 12a + 32 = 0$ [$2^y = a$ ধরে]

বা, $a^2 - 8a - 4a + 32 = 0$

বা, $a(a - 8) - 4(a - 8) = 0$

বা, $(a - 4)(a - 8) = 0$

$\therefore$ $a - 4 = 0$ অথবা, $a - 8 = 0$

বা, $a = 4$ অথবা, $a = 8$

বা, $2^y = 2^2$ অথবা, $2^y = 2^3$ [$a = 2^y$ বসিয়ে]

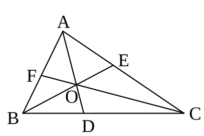
$\therefore$ $y = 2$ অথবা, $y = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় $y = 2, 3$

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$AD = 3$ সে.মি.



এখানে, ΔABC-এর ভরকেন্দ্র O.

আমরা জানি,

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র মধ্যমাত্রয়কে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

সুতরাং,

$\frac{OA}{OD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OD}{OA} = \frac{1}{2}$

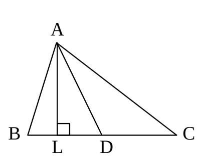
বা, $\frac{OD + OA}{OA} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{OA} = \frac{3}{2}$

বা, $\frac{3}{OA} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $OA = 2$ সে.মি.। **(Ans.)**

খ



মনে করি, ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 + BD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.

অঙ্কন : A বিন্দু হতে $AL \perp BC$ আঁকি।

প্রমাণ : ΔADC এর $\angle ADC$ স্থূলকোণ এবং CD রেখার উপর AD এর লম্ব অভিক্ষেপ LD।

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2CD \,.\, LD$ .... (i)

আবার, ΔABD এর $\angle ADB$ সূক্ষ্মকোণ এবং BD রেখার উপর AD এর লম্ব অভিক্ষেপ LD।

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \,.\, LD$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$AC^2 + AB^2 = AD^2 + CD^2 + 2CD \,.\, LD + AD^2 + BD^2 - 2BD.LD$

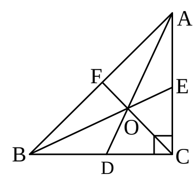
বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + 2BD.LD + BD^2 - 2BD.LD$

[$\because BD = CD$]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore$ $AD^2 + BD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$. **(প্রমাণিত)**

গ



ΔABC এর $\angle ACB = 90°$ এবং BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. তাহলে AD, BE ও CF হলো ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়।

প্রমাণ করতে হবে যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$.

প্রমাণ : মনে করি, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ এবং $AD = d$, $BE = e$, $CF = f$

ΔABC এর AD একটি মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 + AB^2 = 2(AD^2 + CD^2)$

বা, $b^2 + c^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\}$ [$\because BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$]

বা, $b^2 + c^2 = 2\left(d^2 + \frac{1}{4}a^2\right)$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = \frac{4d^2 + a^2}{2}$

বা, $4d^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$

বা, $4d^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ .... (1)

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ .... (2)

এবং, $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$ .... (3)

(1), (2) ও (3) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}$$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ………. (4)

যেহেতু Δ ABC এ $\angle ACB = 90°$ এবং অতিভুজ AB

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

বা, $c^2 = b^2 + a^2$ ……………………………….. (5)

(4) ও (5) নং হতে পাই, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(c^2 + c^2)$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3 \times 2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

$\therefore 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$. **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক $5x - 3y + 7 = 0$

বা, $3y = 5x + 7$

বা, $y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$ ……………….. (i)

(i) নং রেখাটিকে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

ঢাল $m = \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

খ $y = -3x + 2$ রেখাটি P(t, 8) বিন্দুগামী বলে, $8 = -3t + 2$

বা, $3t = -6 \;\therefore t = -2$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 2, 8)

$\therefore$ P(– 2, 8) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 8 = 3(x + 2)$

বা, $y - 8 = 3x + 6$

বা, $y - 3x - 8 - 6 = 0$

বা, $y - 3x - 14 = 0$

$\therefore 3x - y + 14 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = -3x + 2$

রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুকে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$

$\therefore 0 = -3x + 2$

বা, $3x = 2 \;\therefore x = \frac{2}{3}$

আবার, রেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার ভুজ $x = 0$

$\therefore y = -3 \times 0 + 2 \;\therefore y = 2$

সুতরাং, রেখাটি x অক্ষকে $(\frac{2}{3}, 0)$ এবং y অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, B(0, 2) এবং C(– 5, – 3) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -5 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(\frac{4}{3} - 0 - 0) - (0 - 10 - 2)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + 12)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times \frac{40}{3}$ বর্গ একক

$= \frac{20}{3}$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\frac{20}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ, $r = 5$ সেমি

এবং সিলিন্ডারের উচ্চতা, $h = 12$ সেমি

$\therefore$ সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক

$= 2 \times \pi \times 5 \times 12$ বর্গ সেমি

$= 376.992$ বর্গ সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাস, $\frac{44}{\pi}$ সেমি

অতএব, গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{22}{\pi}$ সেমি $= 7.0028$ সেমি (প্রায়)

যেহেতু, গোলকটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়

সেহেতু, ঘনকের বাহু হবে গোলকের ব্যাসের সমান।

$\therefore$ ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য, $2r = 2 \times \frac{22}{\pi}$ সেমি

$= 14.0056$ সেমি (প্রায়)

$\therefore$ ঘনকের আয়তন = (ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য)^3 ঘনএকক

$= (14.0056)^3$ ঘন সেমি

$= 2747.3$ ঘন সেমি (প্রায়)

এবং গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘনএকক

$= \frac{4}{3}\pi \times (7.0028)^3$ ঘন সেমি

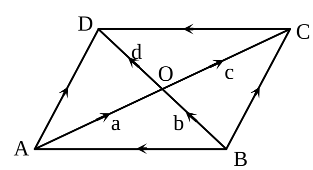
$= 1438.48$ ঘন সেমি (প্রায়)

$\therefore$ অনধিকৃত অংশের আয়তন = ঘনকের আয়তন – গোলকের আয়তন

$= (2747.3 - 1438.48)$ ঘন সেমি

$= 1308.82$ ঘন সেমি (প্রায়) **(Ans.)**

গ



ধরি, ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BO} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$. প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$, $|\underline{b}| = |\underline{d}|$. অর্থাৎ, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$ যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, সুতরাং $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয়পক্ষে – c – d যোগ করে]

এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC $\therefore \underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC।

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD $\therefore \underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD।

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে।

কিন্তু AC, BD দুইটি পরস্পচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = \underline{0}$ বা, $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = \underline{0}$ বা, $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|, |\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

অর্থাৎ, AC এবং BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

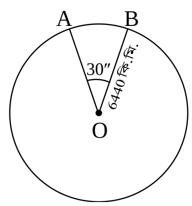
৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র : {HH, HT, TH, TT}

এখানে, মোট নমুনা বিন্দু 4টি এবং এতে কমপক্ষে একটি টেল আছে এমন নমুনা বিন্দু 3টি।

$\therefore$ কমপক্ষে একটি টেল আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

খ



মনে করি, পৃথিবীর O কেন্দ্রে A ও B স্থান দুইটি 30″ কোণ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, OB = r = 6440 কি.মি. এবং স্থান দুইটির দূরত্ব AB = s

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 30'' = \left(\frac{30}{60}\right)'$

$$= \left(\frac{30}{60 \times 60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2 \times 60}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2 \times 60} \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{21600}\right)^c$$

আমরা জানি, $s = r\theta = 6440 \times \frac{\pi}{21600}$ কি.মি.

$= 0.93666$ কি.মি.

$\therefore$ AB = 0.9367 কি.মি. (প্রায়)।

সুতরাং স্থান দুইটির দূরত্ব 0.9367 কি.মি. (প্রায়)। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$

এখন, $A + B = z$ হলে, $x\cos\theta + y\sin\theta = z$

বা, $(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = z^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta.\cos\theta = z^2$

বা, $x^2(1 - \sin^2\theta) + y^2(1 - \cos^2\theta) + 2xy\sin\theta\cos\theta = z^2$

বা, $x^2 - x^2\sin^2\theta + y^2 - y^2\cos^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta = z^2$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta$

বা, $x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta = x^2 + y^2 - z^2$

বা, $(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

$\therefore x\sin\theta - y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. **(প্রমাণিত)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

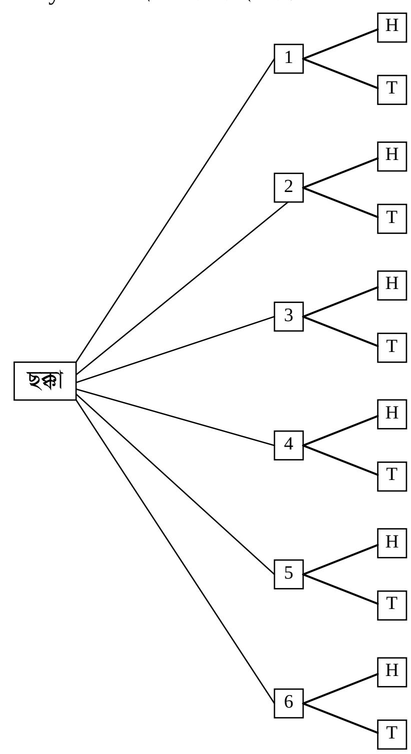
অর্থাৎ নমুনাবিন্দু 6টি।

$\therefore$ 2 এর গুণিতক আসার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র = {2, 4, 6}

অর্থাৎ, 3টি।

$\therefore$ 2 এর গুণিতক আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree নিম্নে দেখানো হলো :



$\therefore$ নমুনা ক্ষেত্র, S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 12টি

ছক্কায় জোড় সংখ্যা ও মুদ্রায় টেল পাওয়ার অনুকূল ফলাফল 2T, 4T, 6T অর্থাৎ, 3টি।

$\therefore$ ছক্কায় জোড় সংখ্যা ও মুদ্রায় টেল পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

গ 1 থেকে 42 পর্যন্ত মোট টিকেট সংখ্যা 42টি।

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 42

20 এর গুণনীয়কের সেট = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

$\therefore$ অনুকূল নমুনাবিন্দু = 6

$\therefore$ দৈবভাবে নেওয়া টিকেটটি 20 এর গুণনীয়ক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$ **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৬

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																										
	১	খ	২	গ	৩	খ	৪	খ	৫	ক	৬	খ	৭	গ	৮	গ	৯	ঘ	১০	খ	১১	ঘ	১২	খ	১৩	ক
	১৪	গ	১৫	ঘ	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	খ	২০	ক	২১	খ	২২	খ	২৩	গ	২৪	ক	২৫	খ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, প্রদত্ত রাশি $= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

প্রদত্ত রাশিটিতে a ও b এর পরস্পর স্থান বিনিময় করলে পাই,

$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$ যা প্রদত্ত রাশিটি থেকে ভিন্ন।

সুতরাং $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি প্রতিসম নয়।

এখন, প্রদত্ত রাশিটিতে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c স্থলে a বসিয়ে পাই,

$\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$ যা প্রদত্ত রাশি থেকে অভিন্ন।

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি চক্রক্রমিক।

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্র-ক্রমিক। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $p(y) = y^3 + y^2 + 4$

p(y) কে (2y + m) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$p\left(-\frac{m}{2}\right) = \left(-\frac{m}{2}\right)^3 + \left(-\frac{m}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{m^3}{8} + \frac{m^2}{4} + 4$

p(y) কে (2y + n) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$p\left(-\frac{n}{2}\right) = \left(-\frac{n}{2}\right)^3 + \left(-\frac{n}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{4} + 4$

প্রশ্নমতে, $-\frac{m^3}{8} + \frac{m^2}{4} + 4 = -\frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{4} + 4$

বা, $-\frac{m^3}{8} + \frac{m^2}{4} = -\frac{n^3}{8} + \frac{n^2}{4}$

বা, $-m^3 + 2m^2 = -m^3 + 2n^2$ [উভয়পক্ষকে 8 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2m^2 - 2n^2 = m^3 - n^3$

বা, $2(m + n)(m - n) = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$

বা, $2m + 2n = m^2 + mn + n^2$ [$\because m \neq n, (m - n) \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-3)}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)^2(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2$ .... (ii)

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে x = 1 বসিয়ে পাই,

$1 = A.0 + B(-2) + C.0$

বা, $1 = -2B$

$\therefore B = -\frac{1}{2}$

(ii) নং অভেদ এর উভয়পক্ষে x = 3 বসিয়ে পাই,

$9 = A.0 + B.0 + C(2)^2$

বা, $9 = 4C$ $\therefore C = \frac{9}{4}$

আবার, (ii) নং হতে পাই,

$x^2 = A(x^2 - 4x + 3) + B(x - 3) + C(x^2 - 2x + 1)$

বা, $x^2 = (A + C)x^2 + (-4A + B - 2C)x + 3A - 3B + C$

উভয়পক্ষের x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + C = 1$

$\therefore A = 1 - C = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$ $\left[\because C = \frac{9}{4}\right]$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-3)} \equiv \frac{-\frac{5}{4}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{9}{4}}{(x-3)}$$

$\therefore g(x) = -\frac{5}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{9}{4(x-3)}$ **(Ans.)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_5\left[120 + \sqrt{x^2 + 16x + 88}\right] = 3$

বা, $120 + \sqrt{x^2 + 16x + 88} = 5^3$ $\left[\begin{array}{l}\because x = \log_x b \\ \Rightarrow a^x = b\end{array}\right]$

বা, $\sqrt{x^2 + 16x + 88} = 125 - 120$

বা, $\sqrt{x^2 + 16x + 88} = 5$

বা, $\left(\sqrt{x^2 + 16x + 88}\right)^2 = (5)^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 16x + 88 = 25$

বা, $x^2 + 16x + 63 = 0$

বা, $x^2 + 9x + 7x + 63 = 0$

বা, $x(x + 9) + 7(x + 9) = 0$

বা, $(x + 7)(x + 9) = 0$

হয়,	অথবা,
$x + 7 = 0$	$x + 9 = 0$
$x = -7$	$x = -9$

$\therefore$ নির্ণেয় $x = -7, -9$.

খ প্রদত্ত ধারাটি, $1 + \frac{1}{3a-1} + \frac{1}{(3a-1)^2} + \frac{1}{(3a-1)^3} + ...$

$a = \frac{4}{3}$ হলে,

$$1 + \frac{1}{3.\frac{4}{3} - 1} + \frac{1}{\left(3.\frac{4}{3} - 1\right)^2} + \frac{1}{\left(3.\frac{4}{3} - 1\right)^3} + ...$$

$= 1 + \frac{1}{4-1} + \frac{1}{(4-1)^2} + \frac{1}{(4-1)^3} + ...$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

যার ১ম পদ, $a = 1$, সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ ১ম 10টি পদের সমষ্টি, $S_{10} = \frac{a(1 - r^{10})}{1 - r}$ $[\because r < 1]$

$$= \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3^{10}}}{\frac{3 - 1}{3}} = \frac{(3^{10} - 1)}{3^{10}} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3^{10} - 1}{2 \times 3^9} = \frac{59048}{39366} = \frac{29524}{19683}$$

গ প্রদত্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারাটি :

$$1 + \frac{1}{3a - 1} + \frac{1}{(3a - 1)^2} + \frac{1}{(3a - 1)^3} + \ldots\ldots\ldots$$

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ, $p = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3a - 1}}{1} = \frac{1}{3a - 1}$

ধারাটিতে অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3a - 1}\right| < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3a - 1} < 1$

হয়, $-1 < \frac{1}{3a - 1}$

বা, $-1 > 3a - 1$

বা, $-1 + 1 > 3a$

বা, $0 > 3a$

$\therefore a < 0$

অথবা, $\frac{1}{3a - 1} < 1$

বা, $3a - 1 > 1$

বা, $3a > 1 + 1$

বা, $a > \frac{2}{3}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{p}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3a - 1}}$

$$= \frac{1}{\frac{3a - 1 - 1}{3a - 1}} = \frac{3a - 1}{3a - 2}$$

নির্ণেয় শর্ত : $a < 0$ এবং $a > \frac{2}{3}$ এবং সমষ্টি $\frac{3a - 1}{3a - 2}$

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$

বা, $\frac{n!}{(n - 2)! \times 2!} = \frac{n!}{(n - 3)! \times 3!}$

বা, $\frac{n!}{(n - 2) \times (n - 3)! \times 2} = \frac{n!}{(n - 3)! \times 6}$

বা, $\frac{1}{(n - 2) \times 2} = \frac{1}{6}$

বা, $2n - 4 = 6$

বা, $2n = 10$

$\therefore n = 5$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত রাশি $= (2 + ax)^7$

$(2 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^7C_r 2^{7 - r}(ax)^r$
$= {}^7C_r 2^{7 - r}.a^r.x^r$

x^3 সংবলিত পদের জন্য, $r = 3$

প্রশ্নমতে, ${}^7C_3.2^{7 - 3}.a^3 = 15120$

বা, $560a^3 = 15120$ বা, $a^3 = 27 = 3^3$

$\therefore a = 3$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{7 + x}{7 - x} > 0$ যদি (i) $7 + x > 0$ এবং $7 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $7 + x < 0$ এবং $7 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -7$ এবং $-x > -7$ $\therefore x < 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -7 < x\}$ এবং $\{x : x < 7\}$

$= (-7, \infty) \cap (-\infty, 7)$

$= (-7, 7)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -7$ এবং $-x < -7$

$\therefore x > 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -7\} \cap \{x : x > 7\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$

(Ans.)

রেঞ্জ নির্ণয় : ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

বা, $e^y = \frac{7 + x}{7 - x}$

বা, $7 + x = 7e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 7(e^y - 1)$

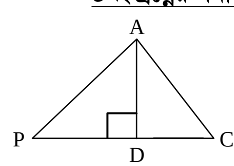
বা, $x = \frac{7(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = \mathbb{R}$. **(Ans.)**

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক



বিশেষ নির্বচন : APC ত্রিভুজে $AD \perp PC$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AP^2 - AC^2 = PD^2 - CD^2$.

প্রমাণ : যেহেতু, $AD \perp PC$

সুতরাং APD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (i)

আবার, ACD সমকোণী ত্রিভুজে,

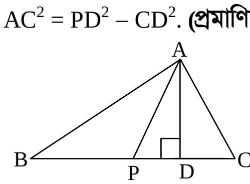
$AC^2 = AD^2 + CD^2$ .... (ii)

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$AP^2 - AC^2 = AD^2 + PD^2 - AD^2 - CD^2$

$\therefore AP^2 - AC^2 = PD^2 - CD^2$. **(প্রমাণিত)**

খ



বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজে AP মধ্যমা। $\angle APB = 120°$ অর্থাৎ স্থূলকোণ। BC এর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AP^2 + BP^2 + AP . BP$.

প্রমাণ : $AD \perp BC$ বলে,

ADP সমকোণী ত্রিভুজে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (i)

এবং $\cos \angle APD = \frac{PD}{AP}$

বা, $PD = AP \,.\, \cos \angle APD$

$= AP \,.\, \cos(180° - \angle APB)$

$= AP.\cos(180° - 120°)$

$= AP.\cos 60°$

$= AP \times \frac{1}{2}$

$\therefore PD = \frac{AP}{2}$ .... (ii)

আবার, ADB সমকোণী ত্রিভুজে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BP + PD)^2$

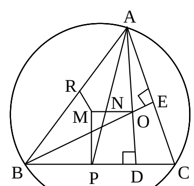
$= AD^2 + BP^2 + PD^2 + 2 \,.\, BP \,.\, PD$

$= (AD^2 + PD^2) + BP^2 + 2 \,.\, BP \,.\, PD$

$= AP^2 + BP^2 + 2 \,.\, BP \,.\, \frac{AP}{2}$ [i ও ii ব্যবহার করে]

$\therefore AB^2 = AP^2 + BP^2 + AP.BP.$ **(প্রমাণিত)**

গ



ΔABC এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র M এবং AP একটি মধ্যমা। লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র M এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে N বিন্দুতে ছেদ করেছে। M, P যোগ করলে MP রেখা BC এর উপর লম্ব। N বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

প্রমাণ : N বিন্দু ভরকেন্দ্র না হলে ধরে নিই, N বিন্দু AP মধ্যমার উপর অন্য একটি বিন্দু। ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র M থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব MP।

$\therefore OA = 2MP$ .... (i)

যেহেতু AD ও MP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel MP$ এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APM$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAN = \angle MPN$

এখন, ΔANO এবং ΔPNM এর মধ্যে

$\angle ANO = \angle PNM$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAN = \angle MPN$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AON$ = অবশিষ্ট $\angle PMN$

$\therefore \Delta ANO$ এবং ΔPNM সদৃশকোণী।

সুতরাং, $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ [(i) হতে]

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$

$\therefore AN : NP = 2 : 1$

অর্থাৎ N বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore$ N বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

অর্থাৎ M, N ও O বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

(প্রমাণিত)

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(6, 7) ও C(0, – 1) বিন্দুগামী AC রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-6}{6-0} = \frac{y-7}{7+1}$

বা, $\frac{x-6}{6} = \frac{y-7}{8}$

বা, $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{4}$

বা, $4x - 24 = 3y - 21$

$\therefore 4x - 3y - 3 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(6, 7), B(– 2, 3), C(0, – 1) এবং D(8, 3)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2}$

$= \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-8)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2}$

$= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ একক

এখন, AB = CD এবং BC = AD বলে চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলোর সমান। তাই চতুর্ভুজটি আয়ত কিংবা সামান্তরিক হবে।

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{100} = 10$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$ একক

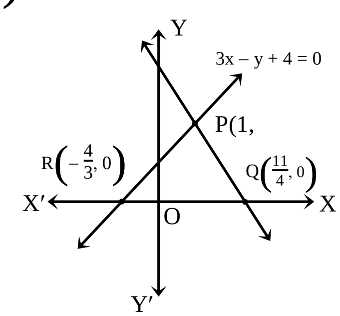
অর্থাৎ, AC কর্ণ = BD কর্ণ

$\therefore$ চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান। তাই, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $3x - y + 4 = 0$ ... ... (i)

বা, $3x - y = -4$

$\therefore \frac{x}{\left(-\frac{4}{3}\right)} + \frac{y}{4} = 1$



অর্থাৎ, এটি x অক্ষকে $R\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে (0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $4x + y - 11 = 0$ ... ... (ii)

বা, $4x + y = 11$

$\therefore \dfrac{x}{\frac{11}{4}} + \dfrac{y}{11} = 1$

অর্থাৎ, এটি x অক্ষকে $Q\left(\dfrac{11}{4}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে $(0, 11)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) ও (ii) নং হতে আড়গুণন পদ্ধতিতে,

$\dfrac{x}{11 - 4} = \dfrac{y}{16 + 33} = \dfrac{1}{3 + 4}$

$\therefore \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{49} = \dfrac{1}{7}$

১ম ও ৩য় পক্ষ হতে পাই, $\dfrac{x}{7} = \dfrac{1}{7} \therefore x = 1$

২য় ও ৩য় পক্ষ হতে পাই, $\dfrac{y}{49} = \dfrac{1}{7} \therefore y = 7$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $P(1, 7)$

এখন, সরলরেখাদ্বয় x অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল, $\Delta = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{11}{4} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{77}{4} + \dfrac{28}{3}\right)$ বর্গ একক

$= \dfrac{343}{24}$ বর্গ একক **(Ans.)**

<u>৬নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক দেওয়া আছে, $P(t, 3t)$ ও $Q(t^2, 2t)$

PQ রেখার ঢাল $= \dfrac{2t - 3t}{t^2 - t} = \dfrac{-t}{t^2 - t} = \dfrac{-t}{t(t-1)} = -\dfrac{1}{t-1}$

প্রশ্নমতে, $-\dfrac{1}{t-1} = -1$

বা, $\dfrac{1}{t-1} = 1$

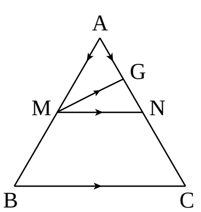
বা, $t - 1 = 1$

বা, $t = 1 + 1$

$\therefore t = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $t = 2$

খ



এখানে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত MN রেখাংশ BC -এর সমান্তরাল। প্রমাণ করতে হবে যে, N, AC-এর মধ্যবিন্দু। N, AC-এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি G, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী পাই,

$\vec{AG} - \vec{AM} = \vec{MG}$

বা, $2(\vec{AG} - \vec{AM}) = 2\vec{MG}$

বা, $2\vec{AG} - 2\vec{AM} = 2\vec{MG}$

কিন্তু, $\vec{AC} = 2\vec{AG}$ এবং $\vec{AB} = 2\vec{AM}$

$\therefore \vec{AC} - \vec{AB} = 2\vec{AG} - 2\vec{AM} = 2\vec{MG}$

আবার, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$

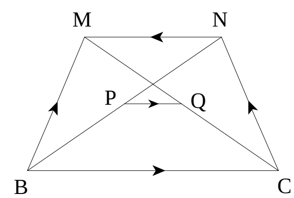
$\therefore \vec{BC} = 2\vec{MG}$

কিন্তু, $\vec{BC} \parallel \vec{MG}$

$\therefore$ MG ও MN অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ, G ও N অভিন্ন বিন্দু।

অতএব, N, AC এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, BCNM ট্রাপিজিয়ামের BN ও CN কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q । P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে $PQ \parallel MN \parallel BC$ এবং $PQ = \dfrac{1}{2}(BC - MN)$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে B, C, N ও M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{n}$ ও $\underline{m}$.

তাহলে $\vec{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

এবং, $\vec{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

এখন, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1}{2}(\underline{b} - \underline{n})$

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1}{2}(\underline{c} - \underline{m})$

$\therefore \vec{PQ} = \dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m}) - \dfrac{1}{2}(\underline{b} + \underline{n})$

$= \dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m} - \underline{b} - \underline{n})$

$= \dfrac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b} + \underline{m} - \underline{n})$

$= \dfrac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{NM})$

$= \dfrac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{MN})$

এখন, $\vec{BC}$ ও $\vec{MN}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং, $(\vec{BC} - \vec{MN})$ ভেক্টরও $\vec{BC}$ ও $\vec{MN}$ এর সমান্তরাল।

আবার, $|\vec{PQ}| = \dfrac{1}{2}|\vec{BC} - \vec{MN}|$

বা, $PQ = \dfrac{1}{2}(|\vec{BC}| - |\vec{MN}|)$

$\therefore PQ = \dfrac{1}{2}(BC - MN)$

$\therefore PQ \parallel MN \parallel BC$ এবং $PQ = \dfrac{1}{2}(BC - MN)$ **(প্রমাণিত)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $20°12'36'' = 20° + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ + \left(\frac{36}{3600}\right)^\circ$

$= \left(20 + \frac{1}{5} + \frac{1}{100}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2021}{100} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান

$= 0.3527$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $3\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = P$ এবং $P = 5$

$\therefore 3\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 5$

বা, $3\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 5$

বা, $4\cot^2\theta = 4$ বা, $\cot^2\theta = 1$

$\therefore \cot\theta = \pm 1$

ধনাত্মক মান নিয়ে পাই, $\cot\theta = 1 = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

ঋণাত্মক মান নিয়ে পাই, $\cot\theta = -1 = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\cot\theta = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4}$

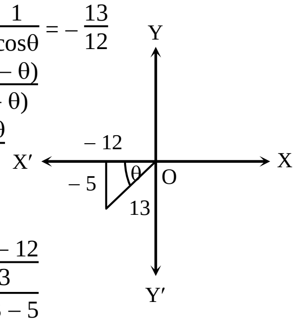
$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{12}{13}$ [$\because \cos\theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \sin\theta = -\frac{5}{13}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{13}{12}$



এখন, $Q = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$

$= \frac{-(-\sin\theta) + \cos\theta}{\sec\theta + \tan(-\theta)}$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{-5-12}{13}}{\frac{-13-5}{12}}$

$= \frac{-17}{13} \times \frac{12}{-18} = \frac{34}{39}$

$\therefore Q = \frac{34}{39}$ **(দেখানো হলো)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

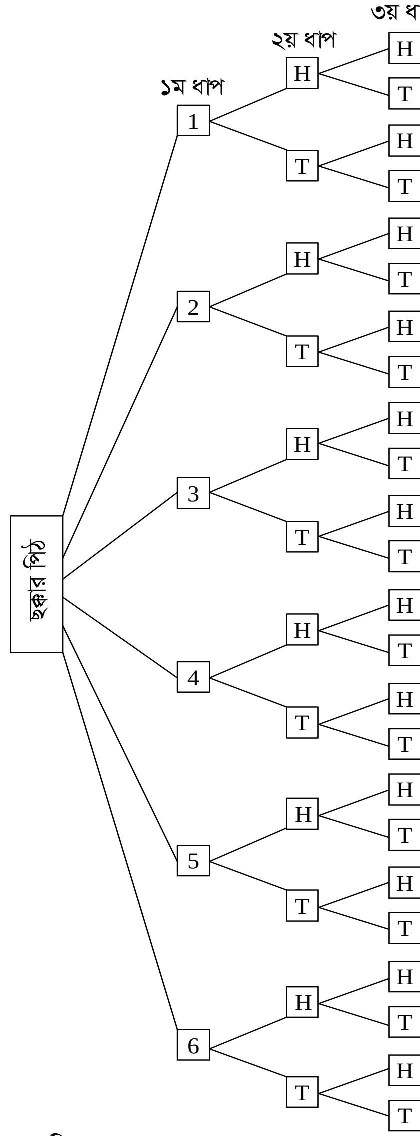
ক $32'4'' = 32' + \left(\frac{4}{60}\right)' = 32' + \left(\frac{1}{15}\right)'$

$= \left(32\frac{1}{15}\right)' = \left(\frac{481}{15}\right)'$

$= \left(\frac{481}{15 \times 60}\right)^0 = \frac{481}{900} \times \frac{\pi}{180}$

$= 0.00932$ রেডিয়ান। **(Ans.)**

খ একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের পরীক্ষাকে তিনটি ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। পরবর্তী দুইটি ধাপের প্রত্যেকটিতে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে দেখানো যায় :



নমুনাক্ষেত্রটি :

S = {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT}

গ 20টি কার্ডে 31 থেকে 50 নম্বরধারী সংখ্যাগুলো হলো :

31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

মোট কার্ডের সংখ্যা = 20টি

কার্ডের সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক এমন সংখ্যা = 11টি

যথা : 31, 33, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 45, 47, 48.

$\therefore$ কার্ডের সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{11}{20}$. **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৭

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	খ	২	ঘ	৩	ঘ	৪	খ	৫	গ	৬	গ	৭	ঘ	৮	খ	৯	গ	১০	গ	১১	ক	১২	গ	১৩	ঘ
	১৪	খ	১৫	গ	১৬	গ	১৭	খ	১৮	খ	১৯	গ	২০	ঘ	২১	ঘ	২২	ক	২৩	ঘ	২৪	গ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(y) = y^3 - y^2 - 10y - 8$

$P(y)$ কে $(y + 5)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে, $P(-5)$

$\therefore P(-5) = (-5)^3 - (-5)^2 - 10(-5) - 8$
$= -125 - 25 + 50 - 8$
$= -108$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -108$. **(Ans.)**

খ $P(y)$ কে $(y - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,
$P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$
এবং $P(y)$ কে $(y - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,
$P(b) = b^3 - b^2 - 10b - 8$
প্রশ্নমতে, $P(a) = P(b)$
$a^3 - a^2 - 10a - 8 = b^3 - b^2 - 10b - 8$
বা, $a^3 - b^3 - a^2 + b^2 - 10a + 10b - 8 + 8 = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a^2 - b^2) - 10(a - b) = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a + b)(a - b) - 10(a - b) = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a - b)(a + b + 10)$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 - a - b - 10) = 0$
$\therefore a^2 + b^2 + ab - a - b - 10 = 0$. $[a - b \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে$]$

(দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $Q(a) = a^3 + a^2 - 6a$
$= a(a^2 + a - 6)$
$= a(a^2 - 2a + 3a - 6)$
$= a\{a(a - 2) + 3(a - 2)\}$
$= a(a - 2)(a + 3)$

এখন, $\dfrac{a^2 + a - 1}{Q(a)} = \dfrac{a^2 + a - 1}{a(a - 2)(a + 3)}$

ধরি, $\dfrac{a^2 + a - 1}{a(a - 2)(a + 3)} \equiv \dfrac{A}{a} + \dfrac{B}{a - 2} + \dfrac{C}{a + 3}$ .... (1)

(1) নং-এর উভয় পার্শ্বে $a(a - 2)(a + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$a^2 + a - 1 = A(a - 2)(a + 3) + Ba(a + 3) + Ca(a - 2)$
বা, $a^2 + a - 1 = A(a^2 + a - 6) + B(a^2 + 3a) + C(a^2 - 2a)$
$\therefore a^2 + a - 1 = (A + B + C)a^2 + (A + 3B - 2C)a - 6A$
উভয়পক্ষ হতে a^2, a এর সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,
$A + B + C = 1$ .... (2)
$A + 3B - 2C = 1$ .... (3)
এবং $-6A = -1$

$\therefore A = \dfrac{1}{6}$

(3)নং সমীকরণ থেকে (2)নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{array}{rl} A + 3B - 2C &= 1 \\ A + B + C &= 1 \\ \underline{(-)\ (-)\ (-)} & \underline{(-)} \\ 2B - 3C &= 0 \end{array}$$

বা, $2B = 3C$

$\therefore B = \dfrac{3}{2}C$ .... (4)

(2) নং-এ $A = \dfrac{1}{6}$ এবং $B = \dfrac{3}{2}C$ বসিয়ে পাই, $\dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{2}C + C = 1$

বা, $\dfrac{3C + 2C}{2} = 1 - \dfrac{1}{6}$

বা, $\dfrac{5C}{2} = \dfrac{5}{6}$

বা, $C = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{3}$

(4)নং সমীকরণে $C = \dfrac{1}{3}$ বসিয়ে পাই, $B = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$

এখন (1)নং-এ $A = \dfrac{1}{6}$, $B = \dfrac{1}{2}$ এবং $C = \dfrac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{a^2 + a - 1}{a(a - 2)(a + 3)} \equiv \frac{\frac{1}{6}}{a} + \frac{\frac{1}{2}}{a - 2} + \frac{\frac{1}{3}}{a + 3}$$
$$= \frac{1}{6a} + \frac{1}{2(a - 2)} + \frac{1}{3(a + 3)}$$

$$\therefore \frac{a^2 + a - 1}{Q(a)} = \frac{1}{6a} + \frac{1}{2(a - 2)} + \frac{1}{3(a + 3)};$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **(Ans.)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $0.0\dot{2} = 0.022222$...........
$= 0.02 + 0.002 + 0.0002 +$ ....একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ $= 0.02$ এবং সাধারণ অনুপাত $= \dfrac{0.002}{0.02} = 0.1$

খ প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা $= \dfrac{1}{4x + 1} + \dfrac{1}{(4x + 1)^2} + \dfrac{1}{(4x + 1)^3} + ...$

$4x = 1$ হলে ধারাটি $= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ...$

এখানে, ১ম পদ, $a = \dfrac{1}{2}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\text{২য় পদ}}{\text{১ম পদ}} = \dfrac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore S_{12} = a\left(\frac{1 - r^{12}}{1 - r}\right) \quad [\because r < 1]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 1 - \frac{1}{2^{12}}$$
$$= \frac{2^{12} - 1}{2^{12}}$$
$$= 0.9997 \text{ (প্রায়)}$$

গ $\frac{1}{4x+1} + \frac{1}{(4x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{4x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\text{২য় পদ}}{\text{১ম পদ}} = \frac{\frac{1}{(4x+1)^2}}{\frac{1}{4x+1}}$ ...

$r = \dfrac{\frac{1}{(4x+1)}}{\frac{1}{(4x+1)^2}}$ — as printed: $r = \frac{\text{২য় পদ}}{\text{১ম পদ}} = \dfrac{\dfrac{1}{(4x+1)}}{\dfrac{1}{(4x+1)^2}} = \frac{1}{4x+1}$

গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টির ক্ষেত্রে, $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{4x+1}\right| < 1$

বা, $|4x+1| > 1$

$(4x+1)$ অঋণাত্মক হলে, $4x + 1 > 1$

বা, $4x > 0$

বা, $x > 0$

$(4x+1)$ ঋণাত্মক হলে, $-(4x+1) > 1$

বা, $4x + 1 < -1$

বা, $4x < -2$

বা, $x < -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{1}{2}$ অথবা $x > 0$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{1 - \frac{1}{4x+1}}$$

$$= \frac{1}{4x+1} \times \frac{4x+1}{4x} = \frac{1}{4x}$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত, $x < -\frac{1}{2}$ অথবা, $x > 0$ এবং সমষ্টি $= \frac{1}{4x}$

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $P(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 4$

এখানে ধ্রুবপদ $= -4$ এবং মুখ্য সহগ $= 1$

সুতরাং, -4 এর উৎপাদকসমূহের সেট $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$x = 1$ বসিয়ে পাই, $P(1) = (1)^4 - 3(1)^2 + 6(1) - 4$

$= 1 - 3 + 6 - 4$

$= 7 - 7 = 0$

$\therefore$ $(x-1)$, p(x)-এর একটি উৎপাদক

এখন, $P(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 4$

$= x^4 - x^3 + x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4$

$= x^3(x-1) + x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4(x-1)$

$= (x-1)(x^3 + x^2 - 2x + 4)$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x^a = y^b = z^c$ এবং $z^2 = xy$

$\therefore$ $x^a = z^c$ বা, $x = z^{\frac{c}{a}}$

এবং $y^b = z^c$ বা, $y = z^{\frac{c}{b}}$

এখন, $z^2 = xy$

বা, $z^2 = z^{\frac{c}{a}} . z^{\frac{c}{b}}$

বা, $z^2 = z^{\frac{c}{a} + \frac{c}{b}}$

বা, $2 = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$

বা, $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ [উভয়পক্ষকে c দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$. **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, $\left(2x - \frac{k}{2x^2}\right)^9$ দ্বিপদী রাশিটির $(r+1)$-তম পদ x বর্জিত।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= {}^9C_r (2x)^{9-r} \left(-\frac{k}{2x^2}\right)^r$

$= {}^9C_r . 2^{9-r} . x^{9-r} (-1)^r . 2^{-r} . x^{-2r} . k^r$

$= (-1)^r\, {}^9C_r . x^{9-3r} . k^r . 2^{9-2r}$

x বর্জিত পদের জন্য, $9 - 3r = 0$ $\therefore$ $r = 3$

$\therefore$ $(r+1)$ বা $(3+1)$ বা 4 তম পদ x বর্জিত।

প্রশ্নমতে, $(-1)^3\, {}^9C_3 . k^3 . 2^{9-2.3} = 18144$

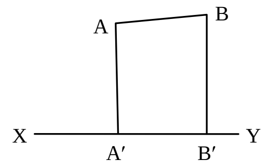
বা, $-84 \times k^3 \times 8 = 18144$ বা, $k^3 = -\frac{18144}{84 \times 8}$

বা, $k^3 = -27$ বা, $k^3 = (-3)^3$

$\therefore$ $k = -3$. **(Ans.)**

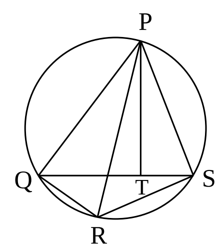
৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে A′B′ রেখাংশ XY রেখার উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

খ এখানে, PQRS একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটি কর্ণ।



PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS।

প্রমাণ করতে হবে যে,

PQ.RS + PS.QR = PR.QS.

অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$ এর সমান করে $\angle SPT$ আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle QPR = \angle SPT$

বা, $\angle QPR + \angle RPT = \angle SPT + \angle RPT$ [$\angle RPT$ যোগ করে]

$\therefore$ $\angle QPT = \angle RPS$

এখন, ΔPQT ও ΔPRS এর মধ্যে

$\angle QPT = \angle RPS$, $\angle PQS = \angle PRS$

[$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore$ ΔPQT ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ $PR . QT = PQ . RS$ .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPTS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPT$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = \angle PST$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PTS$

$\therefore$ ΔPQR ও ΔPTS সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$

বা, $PR . ST = QR . PS$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

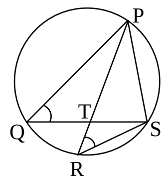
$PR . QT + PR . ST = PQ . RS + QR . PS$

বা, $PR (QT + ST) = PQ . RS + QR . PS$

বা, $PR . QS = PQ . RS + QR . PS$ [$\because$ QT + ST = QS]

$\therefore$ PQ.RS + PS.QR = PR.QS. **(প্রমাণিত)**

গ



দেওয়া আছে, PQS ত্রিভুজের $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ QS কে T বিন্দুতে এবং PQS পরিবৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PT^2 = PQ \,.\, PS - QT.\, TS$.

প্রমাণ : ΔPQT এবং ΔSTR-এ একই চাপ PS এর উপর

$\angle PQT = \angle SRT$ এবং $\angle PTQ = \angle STR$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{PT}{ST} = \frac{QT}{TR}$ [$\because$ অনুরূপ বাহুর অনুপাত সমান]

বা, $PT.\, TR = QT.ST$ [বজ্রগুণন করে]

আবার, ΔPQT এবং ΔPSR এর মধ্যে

$\angle QPT = \angle SPR$ [PT, $\angle P$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle PQT = \angle PRS$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

$\therefore \frac{PQ}{PT} = \frac{PR}{PS}$

বা, $PQ.PS = PT.PR$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $PQ.PS = PT\,(PT + TR)$ [$\because PR = PT + TR$]

বা, $PQ.PS = PT^2 + PT.TR$

বা, $PQ.PS = PT^2 + QT.ST$ [$PT.TR = QT.ST$]

সুতরাং $PT^2 = PQ\,.PS - QT.TS$. **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$

$\therefore$ (8, 4) ও (– 4, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{6-4}{-4-8}$

$= \frac{2}{-12}$

$= -\frac{1}{6}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A, B ও D বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8)।

এখানে, A, B ও D বিন্দু তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করি।

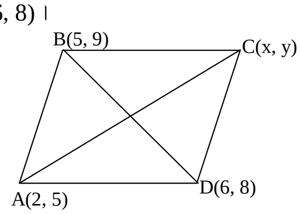
$\therefore \Delta ABD$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(18 + 40 + 30 - 25 - 54 - 16)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|-7|$ বর্গ একক

$= \frac{7}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2, 5), B(5, 9), D(6, 8)।



ধরি, রম্বসটির অপর শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক C(x, y)। রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

এখন, AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{2+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{5+6}{2}, \frac{9+8}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$

যেহেতু, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সেহেতু

$\frac{2+x}{2} = \frac{11}{2}$ | $\frac{5+y}{2} = \frac{17}{2}$

বা, $2 + x = 11$ | বা, $5 + y = 17$

$\therefore x = 9$ | $\therefore y = 12$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক C(9, 12). **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, B(7, – 3) এবং C(2, 3)

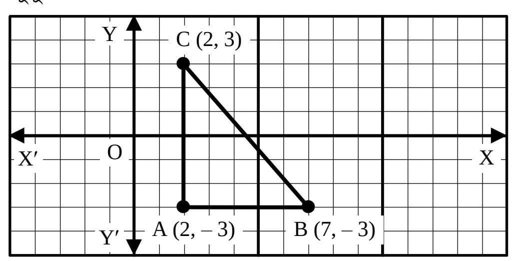
BC রেখার ঢাল $= \frac{3-(-3)}{2-7}$

$= \frac{3+3}{-5} = -\frac{6}{5}$

নির্ণেয় BC রেখার ঢাল $-\frac{6}{5}$।

খ দেওয়া আছে, A(2, – 3), B(7, – 3) এবং C(2, 3)

বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করা হলো :



এখানে, $AB = \sqrt{(7-2)^2 + (-3+3)^2}$

$= \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$ একক

$BC = \sqrt{(7-2)^2 + (-3-3)^2}$

$= \sqrt{5^2 + 6^2}$

$= \sqrt{25 + 36}$

$= \sqrt{61}$ একক

$AC = \sqrt{(2-2)^2 + (3+3)^2}$

$= \sqrt{0 + 6^2}$

$= 6$ একক

এখন, $BC^2 = (\sqrt{61})^2 = 61$

এবং $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\therefore \Delta ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অতএব, A, B এবং C একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' হতে প্রাপ্ত,

AB = 5 একক,

AC = 6 একক

এবং $BC = \sqrt{61}$ একক

AB কে অক্ষ ধরে ΔABC কে এক পাক ঘুরালে সমবৃত্তভূমিক কোণক উৎপন্ন হয়। যার ব্যাসার্ধ, r = AC = 6 একক এবং উচ্চতা, h = AB = 5 একক ও হেলানো তল, $l = \sqrt{61}$ একক।

$\therefore$ কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r\,(r + l)$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 6 \times (6 + \sqrt{61})$

$= 260.318$ বর্গ একক (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 260.318 বর্গ একক (প্রায়)।

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $45°30' = \left(45\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(45\frac{1}{2}\right)^\circ$

$= \left(\frac{91}{2}\right)^\circ = \left(\frac{91}{2} \times \frac{\pi}{180}\right)^c$ রেডিয়ান

$= \frac{91\pi}{360}$ রেডিয়ান

$= 0.7941$ রেডিয়ান

খ দেওয়া আছে, $\text{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{13}{5}$

বা, $\sin\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\sin^2\theta = \left(\frac{5}{13}\right)^2$

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{25}{169}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{144}{169}$

বা, $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{12}{13}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ বলে, $\cos\theta$ ঋণাত্মক হবে,

$\therefore \cos\theta = -\frac{12}{13}$

বামপক্ষ $= \frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}(-\theta)}$

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \text{cosec}\theta}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \text{cosec}\theta}$

$= \frac{\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} + \frac{1}{-\frac{12}{13}}}{\frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} - \frac{13}{5}}$

$= \frac{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}}$

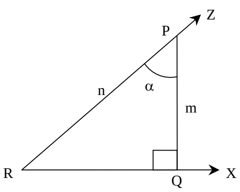
$= \frac{\frac{-18}{12}}{\frac{-25}{5}}$

$= \frac{-18}{12} \times \frac{5}{-25}$

$= \frac{3}{10} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ



চিত্রে, $RQ = \sqrt{n^2 - m^2}$

(ii) হতে, $m + \sqrt{n^2 - m^2} = \sqrt{2}n$

বা, $\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{n} = \sqrt{2}$

বা, $\frac{PQ}{PR} + \frac{RQ}{PQ} = \sqrt{2}$

বা, $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}$

বা, $\sin\alpha = \sqrt{2} - \cos\alpha$

বা, $(\sin\alpha)^2 = (\sqrt{2} - \cos\alpha)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\alpha = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha + \cos^2\alpha$

বা, $1 - \cos^2\alpha = 2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha + \cos^2\alpha$

বা, $1 - \cos^2\alpha - 2 + 2\sqrt{2}\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

বা, $-2\cos^2\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\alpha)^2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\alpha - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\alpha = 1$

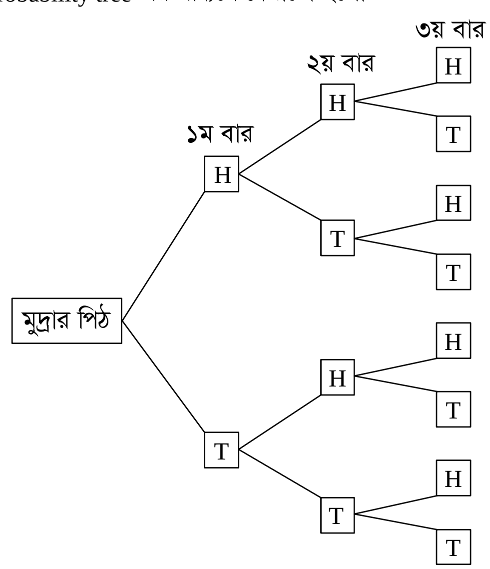
বা, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\alpha = \cos 45°$

$\therefore \alpha = 45°$

৮নং প্রশ্নের সমাধান

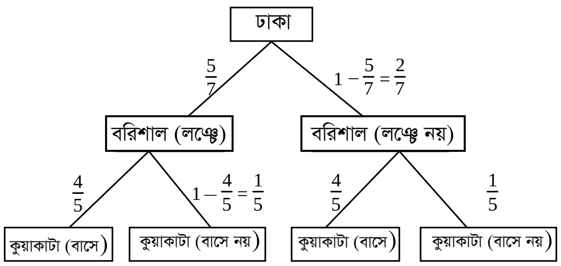
ক একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় মোট ফলাফল নিম্নের Probability tree এর মাধ্যমে দেখানো হলো–



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্র : S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}.

(Ans.)

খ Probability Tree :



সুতরাং, সৈকতের ঢাকা থেকে বরিশাল লঞ্চে না যাওয়া এবং বরিশাল থেকে কুয়াকাটা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{35}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{8}{35}$. **(Ans.)**

গ পলাশের ব্যাগে 11টি হলুদ, 12টি কালো এবং 17টি সবুজ মার্বেল আছে। দৈবভাবে তুলে নেওয়া মার্বেলটি হলুদ হলে ব্যাগে অবশিষ্ট হলুদ মার্বেলের সংখ্যা = 11 – 1 = 10টি।

$\therefore$ ব্যাগে বর্তমান মোট মার্বেলের সংখ্যা = (10+ 12 + 17) টি
= 39টি

এখন, দ্বিতীয় মার্বেলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{12}{39}$

এবং দ্বিতীয় মার্বেলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{17}{39}$

$\therefore$ দ্বিতীয় মার্বেলটি কালো বা সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{12}{39} + \frac{17}{37}$

$= \frac{12 + 17}{39} = \frac{29}{39}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{29}{39}$. **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৮

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর																									
	১	খ	২	ক	৩	ক	৪	ঘ	৫	ঘ	৬	গ	৭	খ	৮	খ	৯	ঘ	১০	গ	১১	ঘ	১২	ক	১৩	ঘ
	১৪	ক	১৫	খ	১৬	গ	১৭	ক	১৮	ক	১৯	ঘ	২০	গ	২১	ঘ	২২	ঘ	২৩	গ	২৪	ঘ	২৫	ঘ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{2x+1}$

এখানে, $\sqrt{2x+1} \in R$ হবে যদি ও কেবল যদি

$2x + 1 \geq 0$ হয়

বা, $2x \geq -1$

$\therefore x \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x \in R : x \geq -\frac{1}{2}\}$. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A(p, q, r) = (p + q + r)(pq + qr + rp)$

এবং $A(p, q, r) = pqr$

বা, $(p + q + r)(pq + qr + rp) = pqr$

বা, $(p + q + r)(pq + qr + rp) - pqr = 0$

বা, $p^2q + pqr + rp^2 + pq^2 + q^2r + pqr + pqr + qr^2 + r^2p - pqr = 0$

বা, $p^2q + pqr + rp^2 + pq^2 + q^2r + pqr + qr^2 + r^2p = 0$

বা, $p^2q + pq^2 + pqr + q^2r + rp^2 + pqr + r^2p + qr^2 = 0$

বা, $pq(p + q) + qr(p + q) + rp(p + q) + r^2(p + q) = 0$

বা, $(p + q)(pq + qr + rp + r^2) = 0$

বা, $(p + q)\{q(r + p) + r(r + p)\} = 0$

বা, $(p + q)(q + r)(r + p) = 0$

$\therefore p = -q$ অথবা, $q = -r$ অথবা, $r = -p$

$p = -q$ হলে,

বামপক্ষ $= \frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{(-q + q + r)^5} = \frac{1}{r^5}$

ডানপক্ষ $= \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{(-q)^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r^5}$

$\therefore \frac{1}{(p + q + r)^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{r^5}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 - 49x$

$= x(x^2 - 49)$

$= x\{(x)^2 - (7)^2\}$

$= x(x + 7)(x - 7)$

$\therefore \frac{x^3}{Q(x)} = \frac{x^3}{x(x + 7)(x - 7)} = \frac{x^2}{(x + 7)(x - 7)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x + 7)(x - 7)} \equiv 1 + \frac{A}{x + 7} + \frac{B}{x - 7}$ .... (i)

এখন, (i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 7)(x - 7)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv (x + 7)(x - 7) + A(x - 7) + B(x + 7)$ .... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 7, -7$ বসিয়ে পাই,

$7^2 = B(7 + 7)$

$\therefore B = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}$

এবং $(-7)^2 = A(-7 - 7)$

$\therefore A = \frac{49}{-14} = \frac{-7}{2}$

এখন, A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x + 7)(x + 7)} \equiv 1 + \frac{-\frac{7}{2}}{x + 7} + \frac{\frac{7}{2}}{x - 7}$$

$\therefore \frac{x^3}{Q(x)} = 1 - \frac{7}{2(x + 7)} + \frac{7}{2(x - 7)}$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt{y^8\sqrt{y^6\sqrt{y^4}}}$

$= \sqrt{y^8\sqrt{y^6.y^2}}$

$= \sqrt{y^8\sqrt{y^8}}$

$= \sqrt{y^8.y^4}$

$= \sqrt{y^{12}}$

$= y^6$

$\therefore$ নির্ণেয় মান y^6. **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p^2 + 2 = \sqrt[3]{49} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

বা, $p^2 + 2 = \sqrt[3]{7^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

বা, $p^2 + 2 = 7^{\frac{2}{3}} + 7^{-\frac{2}{3}}$

বা, $p^2 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}} + \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p^2 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $p^3 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $p^3 = 7 - 7^{-1} - 3.p$

বা, $p^3 = 7 - \frac{1}{7} - 3p$

বা, $p^3 = \frac{49 - 1 - 21p}{7}$

বা, $7p^3 = 48 - 21p$

$\therefore 7p^3 + 21p = 48$ **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{6 + x}{6 - x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore \frac{6 + x}{6 - x} > 0$ যদি (i) $6 + x > 0$ এবং $6 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $6 + x < 0$ এবং $6 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই,

$x > -6$ এবং $-x > -6$

বা, $x > -6$ এবং $x < 6$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -6 < x\} \cap \{x : x < 6\}$

$= (-6, \infty) \cap (-\infty, 6)$

$= (-6, 6)$

(ii) নং হতে পাই,

$x < -6$ এবং $-x < -6$

বা, $x < -6$ এবং $x > 6$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -6\} \cap \{x : x > 6\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-6, 6) \cup \varnothing$

$= (-6, 6)$

রেঞ্জ : $y = f(x) = \ln\frac{6 + x}{6 - x}$

বা, $e^y = \frac{6 + x}{6 - x}$

বা, $6 + x = 6e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 6(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{6(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

$\therefore$ নির্ণেয় ডোমেন $D_f = (-6, 6)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \left(k + \frac{x}{2}\right)^5$

$k = 1$ হলে, $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে,

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

$\therefore A = 1 + 5\left(\frac{x}{2}\right) + 10\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{x}{2}\right)^5$

$= 1 + \frac{5x}{2} + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{4} + \frac{5x^4}{16} + \frac{x^5}{32}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = 4 + 44 + 444 + \ldots \ldots$

$= 4(1 + 11 + 111 + \ldots \ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots \ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots \ldots + n$ তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\{(10 + 100 + 1000 + \ldots \ldots + n$ তম পদ) $-$ $(1 + 1 + 1 + \ldots$

$\ldots + n$ তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\left\{10.\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n\right\} = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$

অতএব, B ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \left(k + \frac{x}{2}\right)^5$

'ক' এর প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে পাই,

$A = k^5 + 5k^4\left(\frac{x}{2}\right) + 10k^3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10k^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5k\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{x}{2}\right)^5$

$= k^5 + \frac{5}{2}k^4x + \frac{5}{2}k^3x^2 + \frac{5}{4}k^2x^3 + \frac{5}{16}kx^4 + \frac{x^5}{32}$

$A = 32 - px + qx^2 + rx^3 + \ldots \ldots \ldots$ হলে, $k^5 = 32 = 2^5$

$\therefore k = 2$

$-p = \frac{5}{2}k^4 = \frac{5}{2}(2)^4 = 40 \quad \therefore p = -40$

$q = \frac{5}{2}k^3 = \frac{5}{2}(2)^3 = 20$

এবং $r = \frac{5}{4}k^2 = \frac{5}{4} \times 2^2 = 5$

$\therefore p = -40, q = 20$ ও $r = 5$ **(Ans.)**

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = x cm

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

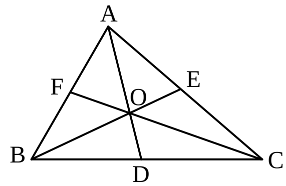
$3 \times$ (অতিভুজের বর্গ) $= 2 \times$ (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি)

বা, $3 \times x^2 = 2 \times (5^2 + 6^2 + 7^2)$ বা, $x^2 = \frac{2}{3} \times 110$

বা, $x^2 = \frac{220}{3}$ বা, $x = \sqrt{\frac{220}{3}}$

$\therefore x = 8.56$ cm (প্রায়) **(Ans.)**

খ ΔABC-এর BC, AC এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F। অর্থাৎ AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা, যারা পরস্পর ভরকেন্দ্র O তে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$



প্রমাণ: ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ... ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$ বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$ বা, $2AD = 3AO$ বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$

$\therefore$ (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

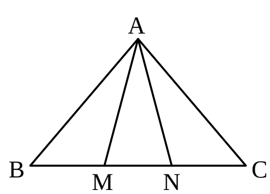
বা, $OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{3}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

$\therefore OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়। অর্থাৎ,

BM = MN = CN।

A, M ও A, N যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে,

$AB^2 + AC^2 = AM^2 + AN^2 + 4MN^2$.

প্রমাণ : ΔABN এর মধ্যমা AM

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AN^2 = 2(AM^2 + MN^2)$ ... ... (i)

আবার, ΔAMC এ মধ্যমা AN

$\therefore AM^2 + AC^2 = 2(AN^2 + MN^2)$ ... ... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AN^2 + AM^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2MN^2 + 2AN^2 + 2MN^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2AN^2 + 4MN^2 - AM^2 - AN^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AM^2 + AN^2 + 4MN^2$. **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক $kx + 3y = 23$ রেখাটি (4, 5) বিন্দুগামী হলে, $k \times 4 + 3 \times 5 = 23$

বা, $4k + 15 = 23$

বা, $4k = 8$

বা, $k = 2$

$\therefore$ রেখাটি, $2x + 3y = 23$

বা, $3y = -2x + 23$ $\therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{3}$

ঢাল $m = -\frac{2}{3} < 0$ বলে, এটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

খ L_1 রেখাটি, $3x + 8y = 25$

বা, $8y = -3x + 25$

$\therefore y = -\frac{3}{8}x + \frac{25}{8}$

$\therefore L_1$ রেখাটির ঢাল $m = -\frac{3}{8}$

L_1 রেখাটি এবং নির্ণেয় রেখাটি সমান্তরাল বলে এদের ঢাল সমান হবে।

$\therefore$ (5, 7) বিন্দুগামী ও $-\frac{3}{8}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$y - 7 = -\frac{3}{8}(x - 5)$

বা, $8y - 56 = -3x + 15$

$\therefore 3x + 8y - 71 = 0$. **(Ans.)**

গ $L_1 : 3x + 8y = 25$ রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$ হবে,

$\therefore 3x + 8 \times 0 = 25$

বা, $3x = 25$

$\therefore x = \frac{25}{3}$

আবার, L_1 রেখাটি y অক্ষের যে বিন্দুতে ছেদ করে তার ভুজ $x = 0$ হবে,

$\therefore 3 \times 0 + 8y = 25$

বা, $8y = 25$

$\therefore y = \frac{25}{8}$

$\therefore L_1$ রেখাটির x অক্ষের ছেদবিন্দু $\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ এর y অক্ষের ছেদবিন্দু $\left(0, \frac{25}{8}\right)$

$\therefore L_1$ রেখাটির সাথে অক্ষদ্বয়ের উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & {}^{25}/_{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{8} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(0 + \frac{625}{24} + 0\right) - (0 + 0 + 0)\right\}$$

$= \frac{1}{2} \times \frac{625}{24} = \frac{625}{48}$ বর্গ একক

$L_2 : 9x + 2y = 31$ রেখাটি x অক্ষের যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$ হবে,

$\therefore 9x + 2 \times 0 = 31$

বা, $9x = 31$ $\therefore x = \frac{31}{9}$

আবার, L_2 রেখাটি y অক্ষের যে বিন্দুতে ছেদ করে তার ভুজ $x = 0$ হবে,

$\therefore 9 \times 0 + 2y = 31$

বা, $2y = 31$ $\therefore y = \frac{31}{2}$

$\therefore L_2$ রেখাটি x অক্ষকে $\left(\frac{31}{9}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে $\left(0, \frac{31}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ L_2 রেখাটির সাথে অক্ষদ্বয়ের উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & {}^{31}/_{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{31}/_{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(0 + \frac{961}{18} + 0\right) - (0 + 0 + 0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{961}{18} = \frac{961}{36} \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত $\Delta_1 : \Delta_2 = \frac{625}{48} : \frac{961}{36} = 1875 : 3844.$ **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(5, 6) এবং B(1, 3) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ,

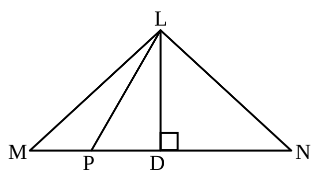
$$\frac{x-5}{5-1} = \frac{y-6}{6-3}$$

বা, $\frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{3}$

বা, $3x - 15 = 4y - 24$

$\therefore$ $3x - 4y + 9 = 0$ **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, ΔLMN-এ LM = LN। ভূমি MN-এর ওপর P যেকোনো একটি বিন্দু। MN এর উপর অঙ্কিত লম্ব LD। প্রমাণ করতে হবে যে, $LM^2 - LP^2 = MP.NP$।



প্রমাণ : ΔLMD এর ∠LDM = এক সমকোণ এবং LM অতিভুজ

[$\because$ LD ⊥ MN]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $LP^2 = LD^2 + MD^2$ ... ... (i)

আবার, ΔLPD এর ∠LDP = এক সমকোণ এবং LP অতিভুজ

[$\because$ LD ⊥ NM]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $LM^2 = LD^2 + PD^2$ ... ... (ii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$LM^2 - LP^2 = LD^2 + MD^2 - LD^2 - PD^2$

বা, $LM^2 - LP^2 = MD^2 - PD^2$

বা, $LM^2 - LP^2 = (MD + PD)(MD - PD)$

বা, $LM^2 - LP^2 = (MD + PD).MP$

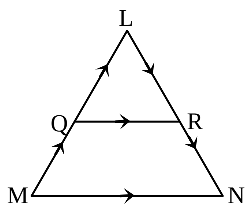
বা, $LM^2 - LP^2 = (ND + PD).MP$

[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ, MD = ND]

বা, $LM^2 - LP^2 = NP.MP$

$\therefore$ $LM^2 - LP^2 = MP.PN$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, LMN ত্রিভুজের LM ও LN বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও R। Q, R যোগ করা হলো। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $QR = \frac{1}{2}MN$ এবং QR || MN



প্রমাণ : Q ও R যথাক্রমে LM ও LN এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}$ এবং $\overrightarrow{LR} = \overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN}$

$\therefore$ $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}$ ... . (i)

এবং $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QL} + \overrightarrow{LR}$

$= -\overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{LR}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$ $\left[\because \overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} \text{ এবং } \overrightarrow{LR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ [সমীকরণ (i) হতে]

সুতরাং, $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MN}\right|$

$\therefore$ $QR = \frac{1}{2}MN$ এবং $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{MN}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু Q ও R যথাক্রমে LM ও LN এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{MN}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore$ QR || MN

অর্থাৎ $QR = \frac{1}{2}MN$ এবং QR || MN **(প্রমাণিত)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin(-750°) = -\sin 750° = -\sin(8 \times 90° + 30°)$

$= -\sin 30° = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$

এখন, B = x হলে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = x$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = x$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = x$

বা, $\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\therefore$ $\cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

আবার, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{1-\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}$ [$\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$]

$= \frac{2x}{x^2+1}$

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{2x}{x^2+1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = \cot\theta + \text{cosec}\theta$

এখন, $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে,

$\cot\theta + \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{3}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{1 + 3}{1 - 3}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = -2$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta$ ঋণাত্মক ২য় ও ৩য় চতুর্ভাগে,

২য় চতুর্ভাগে,

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

৩য় চতুর্ভাগে,

$\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\theta = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

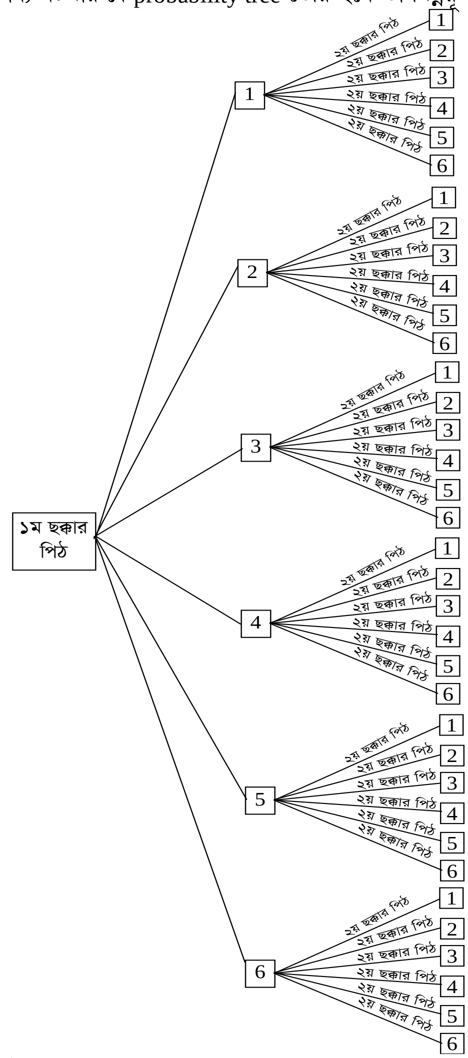
ক দুটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র = {HH, HT, TH, TT}

মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 4

উভয় মুদ্রায় H আসার অনুকূল নমুনাবিন্দু 1টি।

$\therefore$ উভয় মুদ্রায় H আসার সম্ভাবনা = $\frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ দুটি ছক্কা একত্রে একবার নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করা হলে, সম্ভাব্য ঘটনার যে probability tree তৈরি হবে তা নিম্নরূপ :



নমুনাক্ষেত্র = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1) (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দু = 36 টি

আবার ছক্কা দুইটিতে একই সংখ্যা আসার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র
= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$\therefore$ অনুকূল নমুনাবিন্দু = 6 টি

$\therefore$ উভয় ছক্কায় একই ফলাফল আসার সম্ভাবনা = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

গ 61 থেকে 90 ক্রমিক নম্বরযুক্ত টিকেটের মাঝে মৌলিক সংখ্যাগুলো : 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89; মোট 7টি।

$\therefore$ 61 থেকে 90 এই 30টি সংখ্যার মাঝে মৌলিক সংখ্যা 7টি

$\therefore$ টিকেটের নম্বরটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{7}{30}$

আবার, 61 থেকে 90 মাঝে 3 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো :
63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90; মোট 10টি।

$\therefore$ নম্বরটি 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{10}{30}$

$\therefore$ টিকেটের নম্বরটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা এবং 3 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি = $\frac{7}{30} + \frac{10}{30} = \frac{17}{30}$ **(Ans.)**

মডেল টেস্ট- ০৯

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	ঘ	২	গ	৩	গ	৪	খ	৫	ক	৬	খ	৭	ঘ	৮	খ	৯	গ	১০	খ	১১	ঘ	১২	গ	১৩	ক
	১৪	গ	১৫	ক	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	গ	১৯	ক	২০	গ	২১	গ	২২	খ	২৩	ক	২৪	ক	২৫	খ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2-5x}$

$f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$2 - 5x \geq 0$ বা, $x \leq \frac{2}{5}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = \left\{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x \leq \frac{2}{5}\right\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2-5x}$

ধরি, $y = f(x) = \sqrt{2-5x}$

বা, $y = \sqrt{2-5x}$

বা, $y^2 = 2 - 5x$

বা, $5x = 2 - y^2$

বা, $x = \frac{2-y^2}{5}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{2-y^2}{5}$ [$\because y = f(x)$ হলে $x = f^{-1}(y)$ হবে]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{5}$ **(Ans.)**

$\therefore f^{-1}(-2) = \frac{2-(-2)^2}{5} = \frac{2-4}{5} = -\frac{2}{5}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$= x(x^2 - x - 2)$

$= x(x^2 - 2x + x - 2)$

$= x\{x(x-2) + 1(x-2)\}$

$= x(x-2)(x+1)$

$\therefore \frac{5}{g(x)} = \frac{5}{x(x-2)(x+1)}$

ধরি, $\frac{5}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$ ... ... (i)

উভয়পক্ষে $x(x-2)(x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$ ... ... (ii)

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে, $5 = B.2(2+1)$

বা, $5 = 6B \quad \therefore B = \frac{5}{6}$

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $5 = A(0-2)(0+1) + 0 + 0$

বা, $5 = -2A \quad \therefore A = -\frac{5}{2}$

আবার, (ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে, $5 = 0 + 0 + C.(-1)(-1-2)$

বা, $5 = 3C \quad \therefore C = \frac{5}{3}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$$\frac{5}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{-\frac{5}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{6}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1}$$

$\equiv \frac{5}{6(x-2)} - \frac{5}{2x} + \frac{5}{3(x+1)}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(Ans.)

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3.0\dot{2} = 3.022222 ... ...$

$= 3 + (0.02 + 0.002 + 0.0002 + ...)$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা, যার ১ম পদ, $a = 0.02$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.002}{0.02} = 0.1 < 1$

$\therefore 3.0\dot{2} = 3 + \frac{a}{1-r}$

$= 3 + \frac{0.02}{1-0.1} = 3 + \frac{0.02}{0.9}$

$= 3 + \frac{2}{90} = \frac{136}{45}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদীয় ভগ্নাংশ $\frac{136}{45}$ **(Ans.)**

খ ধারাটি, $6 + 66 + 666 +$ ....

মনে করি, $S = 6 + 66 + 666 +$ .... n পদ পর্যন্ত

বা, $S = 6\,(1 + 11 + 111 +$ .... n পদ পর্যন্ত)

বা, $\frac{S}{6} = 1 + 11 + 111 +$ .... n পদ পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = 9 + 99 + 999 +$ .... n পদ পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = (10-1) + (100-1) + (1000-1) +$ .... n পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) +$ .... n পর্যন্ত

বা, $\frac{9S}{6} = 10 + 10^2 + 10^3 +$ .... n পদ পর্যন্ত $- n$

বা, $\frac{9S}{6} = 10\,(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) - n$

বা, $S = \frac{60}{9}\,(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) - \frac{6n}{9}$

বা, $S = \frac{60}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{6n}{9}$

বা, $S = \frac{20\,(10^n - 1)}{27} - \frac{2n}{3}$

বা, $S = \frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি $= \frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রদত্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারাটি :

$1 + \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3} + ...$

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ, $p = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3x-5}}{1} = \frac{1}{3x-5}$

ধারাটিতে অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x-5}\right| < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3x-5} < 1$

হয়, $-1 < \frac{1}{3x-5}$

বা, $-1 > 3x - 5$

বা, $-1 + 5 > 3x$

বা, $4 > 3x$

$\therefore x < \frac{4}{3}$

অথবা, $\frac{1}{3x-5} < 1$

বা, $3x - 5 > 1$

বা, $3x > 1 + 5$

$\therefore x > 2$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{p}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3x-5}}$

$= \frac{1}{\frac{3x-5-1}{3x-5}} = \frac{3x-5}{3x-6}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x < \frac{4}{3}$ এবং $x > 2$ এবং সমষ্টি $\frac{3x-5}{3x-6}$ **(Ans.)**

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_x \sqrt[4]{256} = 2$

বা, $x^2 = \sqrt[4]{256}$ [$\because \log_a N = x$ হলে $a^x = N$]

বা, $x^2 = (4^4)^{1/4}$

বা, $x^2 = 4$

$\therefore x = 2$ [$x > 0$ বলে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $x = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \left(p - \frac{x}{2}\right)^n$

$= \left(p - \frac{x}{2}\right)^6$ [$\because n = 6$]

$= p^6 + {}^6c_1\, p^5\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + {}^6c_2\, p^4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + {}^6c_3\, p^3\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots$

$= p^6 - 6.p^5.\frac{x}{2} + \frac{6.5}{1.2}.p^4.\frac{x^2}{4} - \frac{6.5.4}{1.2.3}.p^3.\frac{x^3}{8} + \ldots\ldots\ldots$

$= p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 - \frac{5}{2}p^3x^3 + \ldots\ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $-\frac{5}{2}p^3 = -20$

বা, $p^3 = \frac{20 \times 2}{5}$

বা, $p^3 = 8$

বা, $p^3 = 2^3$

$\therefore p = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় $p = 2$. **(Ans.)**

গ $p = 1$ এবং $x = 8$ হলে, $A = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^8$

$\therefore (2 - x)A = (2 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^8$

$= (2 - x)\left\{1 + {}^8C_1\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + {}^8C_2\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + {}^8C_3\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right\}$

$= (2 - x)\left(1 - \frac{8}{1}.\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}.\frac{x^2}{4} - \frac{8.7.6}{1.2.3}.\frac{x^3}{8} + \ldots\right)$

$= (2 - x)(1 - 4x + 7x^2 - 7x^3 + \ldots\ldots.)$

$= 2 - 8x + 14x^2 - 14x^3 + \ldots\ldots. - x + 4x^2 - 7x^3 + 7x^4 \ldots\ldots\ldots$

$\therefore (2 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^8 = 2 - 9x + 18x^2 - 21x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots.$

শর্তমতে, $2 - x = 1.9$

বা, $x = 2 - 1.9$

$\therefore x = 0.1$

বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

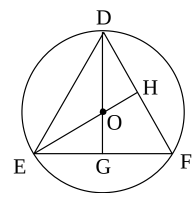
$\therefore (2 - 0.1)\left(1 - \frac{0.1}{2}\right)^8 = 2 - 9 \times 0.1 + 18(0.1)^2 - 21(0.1)^3 + \ldots\ldots$

$\therefore 1.9 \times (0.95)^8 = 2 - 0.9 + 0.18 - 0.021 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1.259$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 1.259$ (প্রায়)। **(Ans.)**

৪নং প্রশ্নের সমাধান



ক এখানে, DEF সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ, R = OD = OE = 7 সে.মি.।

আবার, DEF সমবাহু ত্রিভুজে DG রেখা EF বাহুকে এবং EH রেখা DF বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব, DG এবং EH উভয়েই DEF সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা।

DG এবং EH মধ্যমাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করায় O হচ্ছে ভরকেন্দ্র।

$\therefore DG = \frac{3}{2}OD = \frac{3}{2} \times 7$ সে.মি. $= \frac{21}{2}$ সে.মি. $= 10.5$ সে.মি.

আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

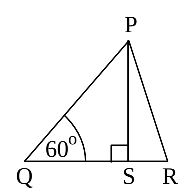
অতএব, DE . DF = 2R . DG

বা, $DE . DE = 2 \times 7 \times 10.5$ [$\because$ DEF সমবাহু ত্রিভুজ]

বা, $DE^2 = 147$ বা, $DE = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$

$\therefore DE = 12.124$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 12.124 সে.মি. (প্রায়)।



খ এখানে, ΔPQR এ $PQ > PR$ এবং $\angle Q = 60°$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ . QR$

অঙ্কন : P হতে QR এর উপর PS লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔPRS-এ $\angle PSR$ = এক সমকোণ

$\therefore PR^2 = PS^2 + RS^2$ .... (1)

[পিথাগোরাসেরউপপাদ্য অনুসারে]

চিত্র হতে, $RS = QR - QS$

$\therefore RS^2 = (QR - QS)^2$ [বর্গ করে]

$\therefore RS^2 = QR^2 + QS^2 - 2QR . QS$ .... (2)

সমীকরণ (1) ও (2) নং হতে পাই,

$PR^2 = PS^2 + QR^2 + QS^2 - 2QR . QS$

$\therefore PR^2 = PS^2 + QS^2 + QR^2 - 2QR . QS$ .... (3)

আবার, ΔPQS হতে, $\angle PSQ$ = এক সমকোণ

$\therefore PQ^2 = PS^2 + QS^2$ .... (4)

(3) ও (4) নং হতে পাই, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR . QS$

বা, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR . \frac{QS}{PQ} . PQ$ .... (5)

এখন, যেহেতু $\angle Q = 60°$ এবং $\angle PSQ$ = এক সমকোণ

$\therefore \frac{QS}{PQ} = \cos\angle Q = \cos 60°$

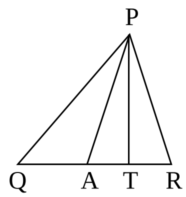
$\therefore \frac{QS}{PQ} = \frac{1}{2}$

এখন, (5) নং এ $\frac{QS}{PQ} = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2. QR .\frac{1}{2} . PQ$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ . QR.$ **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, ΔPQR এ $PQ > PR$ এবং এর PA মধ্যমা QR বাহুকে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PA^2 + QA^2)$।

অঙ্কন : QR বাহুর উপর PT লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔPQA এর $\angle PAQ$ স্থূলকোণ এবং QA রেখার বর্ধিতাংশের উপর PA রেখার লম্ব অভিক্ষেপ AT.

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PA^2 + QA^2 + 2QA \,.\, AT$ .... (1)

এখানে, ΔPRA এর $\angle PAR$ সূক্ষ্মকোণ এবং AR রেখার উপর PA রেখার লম্ব অভিক্ষেপ AT.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PA^2 + AR^2 - 2AR \,.\, AT$ .... (2)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = 2PA^2 + QA^2 + AR^2 + 2QA \,.\, AT - 2AR \,.\, AT$

$= 2PA^2 + QA^2 + QA^2 + 2QA \,.\, AT - 2QA \,.\, AT$ $[\because AR = QA]$

$= 2PA^2 + 2QA^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PA^2 + QA^2)$. **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $D(a^2, 2)$, $E(a, 1)$ ও $F(0, 0)$ তিনটি বিন্দু।

$\therefore$ DE রেখার ঢাল $= \dfrac{1-2}{a-a^2}$

$= \dfrac{-1}{-a(a-1)} = \dfrac{1}{a(a-1)}$

এবং EF রেখার ঢাল $= \dfrac{0-1}{0-a} = \dfrac{1}{a}$

যেহেতু D, E ও F বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ DE রেখার ঢাল = EF রেখার ঢাল

বা, $\dfrac{1}{a(a-1)} = \dfrac{1}{a}$

বা, $a^2 - a = a$

বা, $a^2 - 2a = 0$

বা, $a(a-2) = 0$

$\therefore a = 0, 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = 3x + 4$ ... ... (i)

$3x + y = 10$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের সমাধানই হবে এদের ছেদবিন্দু R.

(i) নং এ $y = 3x + 4$ বসিয়ে পাই, $3x + 3x + 4 = 10$

বা, $6x = 6$

$\therefore x = 1$

(i) নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে পাই, $y = 3.1 + 4$

$= 3 + 4 = 7$

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 7)$

$\therefore$ R(1, 7) বিন্দুগামী এবং 3 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 7 = 3(x - 1)$

বা, $y - 7 = 3x - 3$

$\therefore 3x - y + 4 = 0$ **(Ans.)**

গ $y = 3x + 4$ রেখাটি x অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করে,

সুতরাং রেখাটির কোটি $y = 0$ হবে,

$\therefore 0 = 3x + 4$

বা, $3x = -4$ বা, $x = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

আবার, $3x + y = 10$ রেখাটি y অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে,

সুতরাং রেখাটির ভুজ $x = 0$ হবে,

$\therefore y = 10$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক Q(0, 10)

দেওয়া আছে, A(5, 3)

$\therefore \Delta APQ$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -\frac{4}{3} & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{40}{3} + \dfrac{12}{3} - 50\right|$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-40+12-150}{3}\right|$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-178}{3}\right|$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{178}{3}$ বর্গ একক

$= 29.67$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 29.67 বর্গএকক (প্রায়) **(Ans.)**

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, প্রতিটি গোলকের ব্যাস = 4 সে.মি.

$\therefore$ প্রতিটি গোলকের ব্যাসার্ধ, $R = \dfrac{4}{2}$ সে.মি. = 2 সে.মি.

$\therefore$ প্রতিটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi R^2$ বর্গ একক

$= (4 \times 3.1416 \times 2^2)$ বর্গ সে.মি.

$= 50.27$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

সমবৃত্তভূমিক কোণকের ব্যাসার্ধ, $r = 6$ সে.মি.

এবং উচ্চতা, $h = 8$ সে.মি.

$\therefore$ হেলানো উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{100}$ সে.মি. = 10 সে.মি.

$\therefore$ কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(l + r)$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 6(10 + 6)$ বর্গ সে.মি.

$= 301.5936$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ এখানে, কোণকের আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

$= \dfrac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8$ ঘন সে.মি.

$= 96\pi$ ঘন সে.মি.

এবং নিরেট গোলকের আয়তন $= \dfrac{4}{3}\pi R^3$ ঘন একক

$= \dfrac{4}{3} \times \pi \times 2^3$ ঘন সে.মি. $[\because R = 2$ সে.মি.$]$

$= \dfrac{32\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

ধরি, কোণকটি গলিয়ে n সংখ্যক গোলক তৈরি করা যাবে।

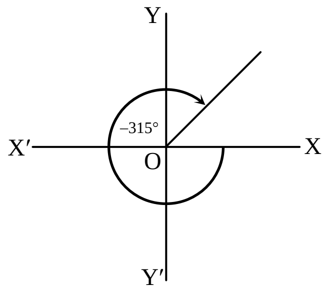
প্রশ্নমতে, $96\pi = n\left(\dfrac{32\pi}{3}\right)$

বা, $n = \dfrac{96\pi \times 3}{32\pi}$

$\therefore n = 9$টি **(Ans.)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক



$\therefore$ – 315° কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \dfrac{\cot A + \operatorname{cosec}A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec}A + 1}$

$= \dfrac{\cot A + \operatorname{cosec}A - (\operatorname{cosec}^2A - \cot^2A)}{\cot A - \operatorname{cosec}A + 1}$

$= \dfrac{\cot A + \operatorname{cosec}A + (\cot A + \operatorname{cosec}A)(\cot A - \operatorname{cosec}A)}{\cot A - \operatorname{cosec}A + 1}$

$= \dfrac{(\cot A + \operatorname{cosec}A)(\cot A - \operatorname{cosec}A + 1)}{(\cot A - \operatorname{cosec}A + 1)}$

$= \cot A + \operatorname{cosec}A = \dfrac{\cos A}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin A}$

$= \dfrac{1 + \cos A}{\sin A} = \sqrt{\dfrac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1 + \cos A)^2}{1 - \cos^2A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1 + \cos A)^2}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}}$

$= \sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{1}{\sec A}}{1 - \dfrac{1}{\sec A}}}$

$= \sqrt{\dfrac{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A}}{\dfrac{\sec A - 1}{\sec A}}} = \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$\therefore P = \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $R = \tan\alpha + \sec\alpha$

$R = \sqrt{3}$ হলে,

$\therefore \tan\alpha + \sec\alpha = \sqrt{3}$

বা, $\sec\alpha = \sqrt{3} - \tan\alpha$

বা, $\sec^2\alpha = (\sqrt{3} - \tan\alpha)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\alpha = 3 - 2\sqrt{3}\tan\alpha + \tan^2\alpha$

বা, $2\sqrt{3}\tan\alpha = 2$

বা, $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $[\because 0 \le \alpha \le 2\pi]$

$\tan\alpha$ ১ম ও ৩য় চতুর্ভাগে ধনাত্মক,

১ম চতুর্ভাগে,

বা, $\tan\alpha = \tan\dfrac{\pi}{6}$ $\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

৩য় চতুর্ভাগে, $\tan\alpha = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\alpha = \tan\dfrac{7\pi}{6}$ $\therefore \alpha = \dfrac{7\pi}{6}$

এখন, $\tan\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ হলে, $\tan\alpha + \sec\alpha$

$= \tan\dfrac{\pi}{6} + \sec\dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

এবং $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$ হলে, $\tan\dfrac{7\pi}{6} + \sec\dfrac{7\pi}{6}$

$= \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sec\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \tan\dfrac{\pi}{6} - \sec\dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \dfrac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপে প্রাপ্ত নমুনাক্ষেত্র = {HH, HT, TH, TT}

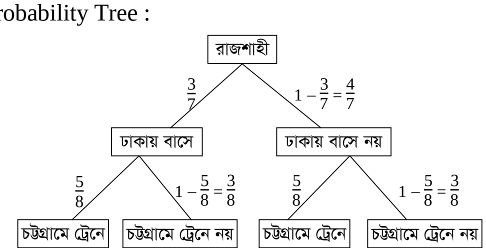
মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 4

বড়জোর দুইটি টেল আসার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = 4

$\therefore$ বড়জোর দুইটি টেল আসার সম্ভাবনা $= \dfrac{4}{4} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা 1

খ Probability Tree :



নাবিদ রাজশাহী থেকে ঢাকায় বাসে এবং চট্টগ্রামে ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা = P [ঢাকায় বাসে কিন্তু চট্টগ্রামে ট্রেনে নয়]

$= \dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{56}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $\dfrac{9}{56}$.

গ এখানে, 30 থেকে 50 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর মোট সংখ্যা = 21টি। 30 থেকে 50 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর মধ্যে জোড় অথবা 5 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো হলো : 30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 50 = 13টি

এবং 30 থেকে 50 পর্যন্ত এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যাগুলো হলো : 31, 37, 41, 43, 47 = 5টি

$\therefore$ সংখ্যাটি জোড় অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= \dfrac{13}{21}$

এবং সংখ্যাটি মৌলিক সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা $= \dfrac{5}{21}$

$\therefore$ সংখ্যাটি জোড় অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা এবং মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনার পার্থক্য $= \dfrac{13}{21} - \dfrac{5}{21} = \dfrac{13 - 5}{21} = \dfrac{8}{21}$

$\therefore$ নির্ণেয় পার্থক্য $\dfrac{8}{21}$. **(দেখানো হলো)**

মডেল টেস্ট- ১০

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা

উত্তর	১	ঘ	২	ঘ	৩	ক	৪	ঘ	৫	গ	৬	খ	৭	গ	৮	ঘ	৯	খ	১০	খ	১১	খ	১২	ক	১৩	ক
	১৪	খ	১৫	ক	১৬	ঘ	১৭	ঘ	১৮	ক	১৯	গ	২০	গ	২১	ঘ	২২	গ	২৩	ঘ	২৪	খ	২৫	খ		

সৃজনশীল

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 14x - 7 + ax^3 + 28x^2 - a$

এটি x চলকের বহুপদী।

$\therefore$ $f(x)$ এর আদর্শ রূপ হলো : $ax^3 + 28x^2 + 14x - a - 7$

এবং $f(x)$ এর ধ্রুবপদ হলো : $- a - 7$. **(Ans.)**

খ যদি $(2x - 1)$ বা $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

দেওয়া আছে, $f(x) = 14x - 7 + ax^3 + 28x^2 - a$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 14\left(\frac{1}{2}\right) - 7 + a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 28\left(\frac{1}{2}\right)^2 - a$

বা, $0 = 7 - 7 + \frac{a}{8} + 7 - a$

বা, $a - \frac{a}{8} = 7$

বা, $\frac{8a - a}{8} = 7$

বা, $7a = 7 \times 8$

বা, $a = \frac{7 \times 8}{7}$

$\therefore a = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় মান : $a = 8$. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = P^{-3} + Q^{-3} + R^{-3}$

আবার, $A = \frac{3}{PQR}$

সুতরাং, $P^{-3} + Q^{-3} + R^{-3} = \frac{3}{PQR}$

বা, $\frac{1}{P^3} + \frac{1}{Q^3} + \frac{1}{R^3} = \frac{3}{PQR}$

বা, $\frac{1}{P^3} + \frac{1}{Q^3} + \frac{1}{R^3} - \frac{3}{PQR} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{P}\right)^3 + \left(\frac{1}{Q}\right)^3 + \left(\frac{1}{R}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{P}\right)\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{1}{R}\right) = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}\right)\left\{\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)^2+\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}\right)\left\{\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)^2+\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = 0$

বা, $\frac{QR + RP + PQ}{PQR} = 0$

$\therefore PQ + QR + RP = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}\right)^2 = 0$

কিন্তু কতকগুলো বর্গরাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকের মান পৃথকভাবে শূন্য হয়।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)^2 = 0$	$\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{R}\right)^2 = 0$	$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} = 0$	বা, $\frac{1}{Q} - \frac{1}{R} = 0$	বা, $\frac{1}{R} - \frac{1}{P} = 0$
বা, $\frac{1}{P} = \frac{1}{Q}$	বা, $\frac{1}{Q} = \frac{1}{R}$	বা, $\frac{1}{R} = \frac{1}{P}$
$\therefore P = Q$	$\therefore Q = R$	$\therefore R = P$

অর্থাৎ $P = Q = R$

অতএব, $PQ + QR + RP = 0$ এবং $P = Q = R$. **(প্রমাণিত)**

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3.0\dot{4}\dot{2} = 3.0424242 \ldots\ldots$

$= 3 + (0.042 + 0.00042 + 0.0000042 + \ldots\ldots)$

বন্ধনীর ভেতরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 0.042$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{0.00042}{0.042} = 0.01$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{0.042}{1 - 0.01}$

$= \frac{0.042}{0.99} = \frac{42}{990} = \frac{7}{165}$

$\therefore 3.0\dot{4}\dot{2} = 3 + \frac{7}{165} = \frac{502}{165}$. **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি, $(5x - 4)^{-1} + (5x - 4)^{-2} + (5x - 4)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{5x - 4} + \frac{1}{(5x - 4)^2} + \frac{1}{(5x - 4)^3} + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{5x - 4}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{\frac{1}{(5x - 4)^2}}{\frac{1}{(5x - 4)}} = \frac{1}{5x - 4}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{5x - 4}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{5x - 4} < 1$

এখন, $\frac{1}{5x - 4} > -1$	অথবা, $\frac{1}{5x - 4} < 1$
বা, $5x - 4 < -1$	বা, $5x - 4 > 1$
বা, $5x < 3$ $\therefore x < \frac{3}{5}$	বা, $5x > 5$ $\therefore x > 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত $x < \frac{3}{5}$ অথবা $x > 1$

এবং অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{1}{5x - 4}}{1 - \frac{1}{5x - 4}}$

$= \frac{\frac{1}{5x - 4}}{\frac{5x - 4 - 1}{5x - 4}} = \frac{1}{5x - 5}$ **(Ans.)**

গ প্রশ্নানুসারে, প্রদত্ত ধারা : $3 + 33 + 333 + ...$

মনে করি, প্রদত্ত ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n

$\therefore S_n = 3 + 33 + 333 + ...n$ তম পদ পর্যন্ত

বা, $S_n = 3\,(1 + 11 + 111 + ...n$ তম পদ পর্যন্ত)

বা, $S_n = \frac{3}{9}\,(9 + 99 + 999 + ...n$ তম পদ পর্যন্ত)

বা, $\frac{9}{3} S_n = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...n$ তম পদ পর্যন্ত

বা, $3.\, S_n = (10 + 10^2 + 10^3 + ...+ 10^n) - (1 + 1 + 1 + ... n$ তম পদ পর্যন্ত)

বা, $3.\, S_n = 10(1 + 10 + 10^2 + ...+10^{n-1}) - n$

বা, $3.\, S_n = 10\,.\,\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$ $\left[\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\right.$ সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $3S_n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

$\therefore S_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{1}{3}n$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{1}{3}n.$ **(Ans.)**

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $8^{2x} = 2^{x + 1}$

বা, $(2^3)^{2x} = 2^{x + 1}$

বা, $2^{6x} = 2^{x + 1}$ বা, $6x = x + 1$

বা, $6x - x = 1$ বা, $5x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \left(y^2 + \frac{p}{y^2}\right)^6$

$= \binom{6}{0}(y^2)^6 + \binom{6}{1}(y^2)^5.\frac{p}{y^2} + \binom{6}{2}(y^2)^4.\left(\frac{p}{y^2}\right)^2 + \binom{6}{3}(y^2)^3\left(\frac{p}{y^2}\right)^3 + ...$

$= y^{12} + 6.y^{10}.\frac{p}{y^2} + 15y^8.\frac{p^2}{y^4} + 20y^6.\frac{p^3}{y^6} + ...$

$= y^{12} + 6py^8 + 15y^4p^2 + 20p^3 + ...$

y মুক্ত পদের মান $= 14580$

প্রশ্নমতে, $20p^3 = 14580$

বা, $p^3 = \frac{14580}{20}$

বা, $p^3 = 729$ বা, $p^3 = 9^3$

$\therefore p = 9$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{7 + x}{7 - x} > 0$ যদি (i) $7 + x > 0$ এবং $7 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $7 + x < 0$ এবং $7 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -7$ এবং $-x > -7$ $\therefore x < 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -7 < x\}$ এবং $\{x : x < 7\}$

$= (-7, \infty) \cap (-\infty, 7) = (-7, 7)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -7$ এবং $-x < -7$ $\therefore x > 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -7\} \cap \{x : x > 7\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$

(Ans.)

রেঞ্জ নির্ণয় : ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

বা, $e^y = \frac{7 + x}{7 - x}$ বা, $7 + x = 7e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 7(e^y - 1)$ বা, $x = \frac{7(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 20$

$\therefore r = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ সে.মি.

আমরা জানি, পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ।

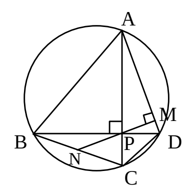
সুতরাং, পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $R = 2r = 2 \times \frac{10}{\pi} = \frac{20}{\pi}$ সে.মি.

$\therefore$ পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2 = \pi \times \left(\frac{20}{\pi}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{400}{\pi}$ বর্গ সে.মি.

$= 127.32$ বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

খ এখানে, $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BD ও AC এর লম্ব ছেদবিন্দু P। $PM \perp AD$ এবং বর্ধিত NP, BC কে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BN = CN$।



প্রমাণ : একই চাপ CD এর উপর দণ্ডায়মান বলে, $\angle DAC = \angle DBC$

অর্থাৎ, $\angle DAP = \angle PBN$

আবার, $\angle DAP = \angle DPM$ [উভয়ে একই $\angle APM$ এর পূরক কোণ]

সুতরাং, $\angle PBN = \angle NPB$

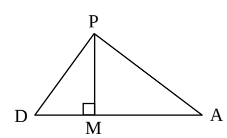
ফলে PBN ত্রিভুজে, $BN = PN$

অনুরূপভাবে দেখানো $\angle NCP = \angle ADP = \angle APM = \angle CPN$

ফলে PCN ত্রিভুজে, $CN = PN$

$\therefore BN = CN$ **(প্রমাণিত)**

গ এখানে, ΔPDA-এ $\angle DPA = 90°$ এবং $PM \perp DA$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = AM.DM$।



প্রমাণ : $\angle DPA = 90°$

$\therefore \angle DPM + \angle MPA = 90°$ .... (i)

আবার, $PM \perp DA$ বলে, $\angle PMD = \angle PMA = 90°$

ΔDPM-এ, $\angle PMD + \angle DPM + \angle PDM = 180°$

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$]

বা, $90° + \angle DPM + \angle PDM = 180$ [$\because \angle PMD = 90°$]

বা, $\angle DPM + \angle PDM = 90°$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\angle DPM + \angle MPA = \angle DPM + \angle PDM$

$\therefore \angle MPA = \angle PDM$

ΔPDM ও ΔPAM-এ

$\angle PMD = \angle PMA$, $\angle PDM = \angle MPA$

অবশিষ্ট $\angle DPM =$ অবশিষ্ট $\angle PAM$

$\therefore \Delta PDM$ ও ΔPAM সদৃশ

$\therefore \frac{DP}{PA} = \frac{PM}{AM} = \frac{DM}{PM}$

অর্থাৎ, $\frac{PM}{AM} = \frac{DM}{PM}$

$\therefore PM^2 = AM.DM$ **(প্রমাণিত)**

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P \equiv (a, 0)$

$Q = (0, b)$

$a = 3, b = 4$ হলে P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 0)$ এবং $(0, 4)$.

$\therefore$ P ও Q এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $PQ = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25} = 5$ **(Ans.)**

খ P(a, 0), Q(0, b) এবং R(1, 1) বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, এদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 0 হবে।

$\therefore$ ΔPQR ক্ষেত্রফল $= 0$

বা, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 0 & b & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(ab + 0 + 0) - (0 + b + a) = 0$

বা, $ab - b - a = 0$

বা, $a + b = ab$

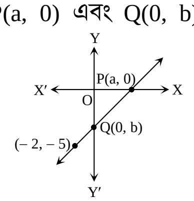
বা, $\frac{a + b}{ab} = 1$

বা, $\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = 1$

বা, $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. **(দেখানো হলো)**

গ রেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে P(a, 0) এবং Q(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।



সুতরাং, OP = a এবং OQ = b

এখন, OP + 2.OQ = 0

বা, $a + 2b = 0$

বা, $a = -2b$ .... (i)

আবার, P(a, 0) এবং Q (0, b) বিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ,

$\frac{y - 0}{0 - b} = \frac{x - a}{a - 0}$

বা, $\frac{y}{-b} = \frac{x - a}{a}$

বা, $ay = -bx + ab$

$\therefore bx + ay = ab$ .... (ii)

(ii) নং রেখাটি $(-2, -5)$ বিন্দুগামী বলে,

$b(-2) + a(-5) = ab$

বা, $-2b - 5a = ab$

বা, $-2b - 5(-2b) = (-2b).b$ [(i) নং হতে a এর মান বসিয়ে]

বা, $-2b + 10b = -2b^2$

বা, $2b^2 + 8b = 0$

বা, $b(b + 4) = 0$

বা, $b + 4 = 0$ $[b \neq 0]$

$\therefore b = -4$

(i) নং সমীকরণে b এর মান বসিয়ে পাই, $a = -2(-4)$

$\therefore a = 8$

(ii) নং সমীকরণে a ও b এর মান বসিয়ে পাই, $(-4)x + 8y = 8(-4)$

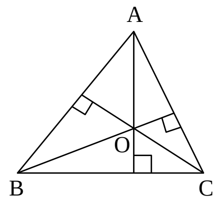
বা, $-4x + 8y = -32$

বা, $x - 2y = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ, $x - 2y = 8$. **(Ans.)**

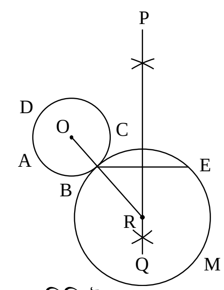
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। O ত্রিভুজ ABC এর লম্ববিন্দু।

খ



দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তের উপর B একটি বিন্দু এবং এর বহি:স্থ কোনো বিন্দু E। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং E বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনেন বিবরণ :

ধাপ-১ : B, E যোগ করি।

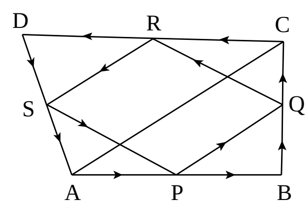
ধাপ-২ : BE এর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ আঁকি।

ধাপ-৩ : O, B যোগ করে বর্ধিত করি।

ধাপ-৪ : বর্ধিত OB রেখাংশ PQ কে R বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৫ : R কে কেন্দ্র করে RB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত BEM বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

গ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S।



P ও Q; Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = PB + BQ = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু, $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$

অর্থাৎ, $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের বহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়। **(প্রমাণিত)**

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত কোণ = $15'7''$

$= \left(15\frac{7}{60}\right)'$ $[\because 1' = 60'']$

$= \left(\frac{907}{60}\right)' = \left(\frac{907}{60 \times 60}\right)^\circ$ $[\because 1^\circ = 60']$

$= \frac{907}{60 \times 60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= 0.0044$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = x$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = x$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$ বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = x^2$ বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q = 3$

বা, $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$

বা, $2 - 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta)^2 - 2\sqrt{2}\sin\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$\therefore 0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, একটি দৈব পরীক্ষার সসীম নমুনাক্ষেত্র S এবং উক্ত নমুনাক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট A একটি ঘটনা।

ধরি, S নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n(S)

A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা = n(A)

$\therefore$ সম্ভাবনার গাণিতিক সংজ্ঞা অনুসারে পাই, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ... ... (i)

এটি স্পষ্ট যে, A ঘটনার উপাদান সংখ্যা 0 থেকে n(S) এর মধ্যে থাকবে।

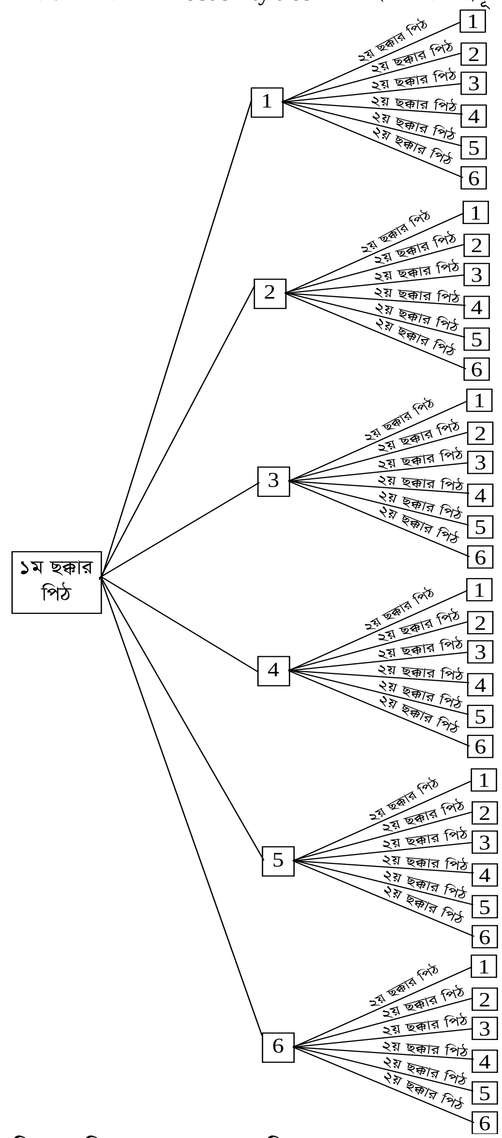
অর্থাৎ, $0 \le n(A) \le n(S)$

বা, $\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)}$ [n(S) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $0 \le P(A) \le 1$ [(i) নং সমীকরণ থেকে]

$\therefore 0 \le P(A) \le 1$ **(দেখানো হলো)**

খ দুইটি ছক্কা একত্রে একবার নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করা হলে, সম্ভাব্য ঘটনার যে Probability tree তৈরি হবে তা নিম্নরূপ :



দুটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি হবে = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

$\therefore$ মোট নমুনা বিন্দু = 36টি

উভয় ছক্কায় একই ফলাফল আসার অনুকূল নমুনা বিন্দু = 6টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

গ ধরি, 1 থেকে 32 নম্বর পর্যন্ত কার্ডের মোট সংখ্যা, n(S) = 32

কার্ডগুলোর মধ্যে 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার ঘটনা,

A = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32}

$\therefore$ মোট সম্ভাব্য ফলাফল, n(A) = 21

$\therefore$ কার্ডের নম্বরটি 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা,

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{21}{32}$ **(Ans.)**